

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....071***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul  $A(1, 2)$  la dreapta  $x + y = 1$ .
- (4p) b) Să se calculeze modulul numărului complex  $z = \frac{1+i}{1-i}$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$ .
- (4p) d) Să se calculeze  $\sin x$ , dacă  $x \in (0, \pi)$  și  $\cos x = \frac{1}{2}$ .
- (2p) e) Să se determine ecuația planului care trece prin punctul  $A(1, 1, 1)$  și este paralel cu planul  $x - y + 3z = 2$ .
- (2p) f) Să se scrie ecuația tangentei la cercul  $x^2 + y^2 = 2$  în punctul  $T(1, 1)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se determine numărul funcțiilor surjective  $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}$ .
- (3p) b) Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x + 1$ .  
 Să se calculeze  $f(g(x))$ , pentru  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) c) Să se calculeze numărul submulțimilor cu trei elemente ale unei mulțimi cu cinci elemente.
- (3p) d) Să se calculeze  $\hat{1} + \hat{3} + \hat{5} + \dots + \hat{11}$  în grupul  $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element din  $\mathbf{Z}_{12}$  să fie soluție a ecuației  $\hat{x}^2 = \hat{x}$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^x - x - 1$ .
- (3p) a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă.
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $[0, \infty)$ .
- (3p) e) Să se arate că  $e^x \geq x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

**SUBIECTUL III (20p)**

Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  și multimea

$G = \left\{ A \in M_3(\mathbf{R}) \mid A \cdot A^T = I_3 \text{ și } \det(A) > 0 \right\}$ , unde  $A^T$  este transpusa matricei  $A$ .

Se știe că  $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$ ,  $\forall X, Y \in M_3(\mathbf{R})$ .

- (4p) a) Să se arate că  $I_3 \in G$  și  $C \in G$ .
- (4p) b) Să se arate că dacă  $A, B \in G$  atunci  $A \cdot B \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că dacă  $A \in G$ , atunci matricea  $A$  este inversabilă și  $A^{-1} \in G$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\det(A) = 1$ ,  $\forall A \in G$ .
- (2p) e) Să se arate că pentru orice  $A \in G$ ,  $(A^T - I_3) \cdot A = I_3 - A$ .
- (2p) f) Să se arate că pentru orice  $A \in G$ ,  $\det(A - I_3) = 0$ .
- (2p) g) Să se arate că pentru orice  $A \in G$ , există  $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ ,  $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , astfel încât  $A \cdot X = X$ .

**SUBIECTUL IV (20p)**

Se consideră funcțiile  $t_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , unde  $t_n(x) = (x^2 - 1)^n$  și

$$f_n(x) = t_n^{(n)}(x), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Prin  $u^{(n)}(x)$  am notat derivata de ordinul  $n$  a funcției  $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  în punctul  $x$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f_1(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f_2'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f_1(x) dx$ .
- (2p) d) Dacă  $f_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ , cu  $a_i \in \mathbf{R}$ ,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$  să se determine coeficientul  $a_n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) e) Să se arate că  $t_n^{(k)}(1) = t_n^{(k)}(-1) = 0$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .
- (2p) f) Să se arate că dacă  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție de  $n$  ori derivabilă pe  $\mathbf{R}$ , cu  $g^{(n)}$  continuă pe  $\mathbf{R}$ , atunci  $\int_{-1}^1 f_n(x) \cdot g(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot g^{(n)}(x) dx$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\int_{-1}^1 f_n(x) \cdot h(x) dx = 0$ , pentru orice funcție polinomială  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de grad mai mic sau egal cu  $n-1$ .

### Varianta 071

**Subiectul I:**

a)  $d = \sqrt{2}$ . b)  $\left| \frac{1+i}{1-i} \right| = 1$ . c)  $\cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0$ . d)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e)  $x-y+3z-3=0$ . f)  $x+y=2$ .

**Subiectul II:**

1. a) 6 functii b)  $f(g(x)) = x^2$ . c)  $C_5^3 = 10$ . d)  $\hat{1} + \hat{3} + \hat{5} + \dots + \hat{11} = \hat{0}$

e)  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_{12} : \hat{x}^2 = \hat{x} \Rightarrow \hat{x} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{9}\} \Rightarrow P(e) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = \infty$ . b)  $f'(x) = e^x - 1$ .

c)  $f'(x) = e^x > 0, (\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$  convexă pe  $\mathbf{R}$ .

d) din (b)  $\Rightarrow f'(x) \geq 0, (\forall)x \geq 0 \Rightarrow f$  strict crescatoare pe  $[0, \infty]$

e) din  $f' < 0, (\forall)x < 0$  și d)  $\Rightarrow f'(0) = 0$  și își schimba semnul în vecinătatea lui 0  $\Rightarrow x_0$  punct de minim local pentru f

$\Rightarrow f(x) \geq 0, (\forall)x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e^x \geq x + 1; (\forall)x \in \mathbf{R}$

**Subiectul III:**

a) Verificare

b) Fie  $A, B \in G$

Avem  $(A \cdot B) \cdot (AB)^t = (AB) \cdot (B^t A^t) = A(BB^t)A^t = AA^t = I_3$  și  $\det(A \cdot B) = \det A \det B > 0 \Rightarrow (AB) \in G, (\forall)A, B \in G$

c)  $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_3 \Rightarrow A^{-1} = A^t$

d)  $\det(A \cdot A^t) = \det A \cdot \det A^t = (\det A)^2$  dar  $\det(A \cdot A^t) = \det I_3 = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1, \det A > 0 \Rightarrow \det A = 1$

e)  $\forall A \in G$  avem  $(A^t - I_3) \cdot A = A^t \cdot A - I_3 \cdot A = I_3 - A$

f) Din e)  $\det(A^t - I_3) \det A = \det(I_3 - A)$  și  $\det(A^t - I_3) = \det(A - I_3) = -\det(I_3 - A) \Rightarrow \det(I_3 - A) = -\det(I_3 - A) \Rightarrow \det(A - I_3) = 0$ .

g) Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ n & v & t \end{pmatrix} \in G$  și  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq O_3$ , a.i.  $A \cdot X = X \Leftrightarrow A \cdot X - X = O_3 \Rightarrow$

sistemul are matricea  $(A - I_3) \Rightarrow \det(A - I_3) = 0$ . Deoarece sistemul este liniar și omogen, admite și solutii diferite de cea banală  $\Rightarrow (\forall)A \in G, (\exists)X \in M_3(\mathbf{R})$  a.i.  $AX = X$  și  $X \neq O_{3,1}$

**Subiectul IV:**

a)  $f_1(x) = [(x^2 - 1)]' = 2x, (\forall)x \in \mathbf{R}.$

b)  $f_2'(x) = 24x.$

c)  $\int_{-1}^1 f_1(x)dx = 0.$

d)  $f_n(x) = [(x^2 - 1)^n]^{(n)} = (x^{2n} + \dots)^{(n)} = (2n)(2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)x^n + \dots \Rightarrow a_n = \frac{(2n)!}{n!}$

e)  $f_n(x) = [(x-1)^n (x+1)^n]^{(n)} = [t_n(x)]^{(n)}$

Functia  $t_n(x)$  are pe 1 si pe -1 radacini multiple de ordinul n, de unde rezulta relatia ceruta.

f) Integrala succesiv prin parti:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f_n(x) \cdot g(x)dx &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n)} \cdot g(x)dx = \int_{-1}^1 [(t_n^{(n-1)}(x))]' \cdot g(x)dx = \\ &= t_n^{(n-1)}(x) \cdot g(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 t_n^{(n-1)}(x) \cdot g'(x)dx = 0 - \int_{-1}^1 [(t_n^{(n-2)}(x))]' \cdot g'(x)dx = \\ &= -t_n^{(n-2)}(x) \cdot g'(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 t_n^{(n-2)}(x) \cdot g''(x)dx = 0 + \int_{-1}^1 t_n^{(n-2)}(x) \cdot g''(x)dx = \dots = (-1)^n \int_{-1}^1 t_n(x) \cdot g^{(n)}(x)dx \end{aligned}$$

g) Daca luam  $g = h$  in f) avem  $g^{(n)}(x) = 0, x \in [-1,1]$ , deci  $\int_{-1}^1 f_n(x) \cdot h(x)dx = 0.$