

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**

Varianta070

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1,3)$ și $B(4,-1)$.
- (4p) b) Să se calculeze modulul numărului complex $12 - 7i$.
- (4p) c) Să se scrie ecuația cercului cu centrul în $A(1,3)$ și de rază 1.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB = 3$, $AC = 4$ și $BC = 5$.
- (2p) e) Să se determine care număr este mai mare: $\cos \frac{3\pi}{7}$ sau $\cos \frac{5\pi}{7}$.
- (2p) f) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,3)$ și este paralelă cu dreapta $x + y = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma numai cu cifrele 2, 4, 6.
- (3p) b) Să se determine numărul submulțimilor mulțimii $\{1, 2, 4, 6\}$.
- (3p) c) Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $\log_2(x^2 + 3) = 2$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) d) Să se calculeze suma $1+5+9+13+\dots+37$.
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 + 2X^2 - 2X - 4$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$, și $g : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Z}$, care verifică $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{Z}$ și $g(x+y) = g(x)+g(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{Q}$.

- (4p) a) Să se arate că $f(0) = g(0) = 0$.
- (4p) b) Să se arate că $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{Z}$ și $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$, avem $f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $f(1) = a \in \mathbf{Q}$, atunci $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbf{Z}$.
- (2p) e) Să se arate că funcția f este injectivă dacă și numai dacă $f(1) \neq 0$.
- (2p) f) Să se arate că funcția f nu este surjectivă.
- (2p) g) Să se arate că $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$ și sirurile $(a_n)_{n \geq 2}$, $(b_n)_{n \geq 2}$ și $(c_n)_{n \geq 2}$

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot \ln 2} + \frac{1}{3 \cdot \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot \ln n}, \quad b_n = a_n - f(n), \quad c_n = a_n - f(n+1), \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (1, \infty)$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $(1, \infty)$.
- (2p) c) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că $\forall k \in (1, \infty)$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{c \ln c}$.
- (2p) d) Să se arate că $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \cdot \ln k}$, $\forall k \in (1, \infty)$.
- (2p) e) Să se arate că sirul $(b_n)_{n \geq 2}$ este strict descrescător iar sirul $(c_n)_{n \geq 2}$ este strict crescător.
- (2p) f) Să se arate că sirurile $(b_n)_{n \geq 2}$ și $(c_n)_{n \geq 2}$ sunt convergente și au aceeași limită.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) h) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(2^n+1)\ln(2^n+1)} + \frac{1}{(2^n+2)\ln(2^n+2)} + \dots + \frac{1}{3^n\ln 3^n} \right)$.

Varianta 070

Subiectul I

- a) $AB = 5$.
- b) $|12 - 7i| = \sqrt{193}$.
- c) $(x-1)^2 + (y-3)^2 - 1 = 0$.
- d) $S_{ABC} = 6$.
- e) $\cos \frac{3\pi}{7} > \cos \frac{5\pi}{7}$.
- f) $x + y - 4 = 0$.

Subiectul II.

1.

- a) 6.
- b) 16.
- c) suma rădăcinilor ecuației este egală cu 0.
- d) $1+5+9+13+\dots+37=190$.
- e) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$.

2.

- a) $f'(x) = 1 + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- d) $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2 + \frac{\pi^2}{2}$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = 2$.

Subiectul III.

- a) Evident, punând $x = y = 0$ în ipoteză.
- b) Pentru orice $x \in \mathbf{Z}$, punând $y = -x$ în relația din enunț, obținem $f(-x) = -f(x)$.
- c) Se demonstrează prin inducție, folosind relația din ipoteză.
- d) Pentru $n = 0$, avem $f(0) = 0 = a \cdot 0$.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, alegând $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ în c), obținem $f(n) = a \cdot n$

Pentru $x \in \mathbf{Z}$, $x < 0$, din b) și a) deducem că $f(x) = a \cdot x$.

e) Evident, folosind definiția funcției injective.

f) Dacă $a = 0$, f este funcția nulă, care nu este surjectivă. Dacă $a \neq 0$, alegem

$$p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \text{ astfel încât } f(1) = a = \frac{p}{q}. \text{ Fie } n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \text{ astfel încât } (n, q) = 1.$$

Atunci $\frac{1}{n} \notin \text{Im } f$, deci funcția f nu este surjectivă.

g) Ca și la punctele anterioare se arată că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall x \in \mathbf{Q}$, $g(nx) = n \cdot g(x)$.

Presupunem că există $a \in \mathbf{Q}^*$ și $b \in \mathbf{Z}^*$ astfel încât $g(a) = b$.

Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, avem $b = g(a) = n \cdot g\left(\frac{a}{n}\right)$, deci numărul $b \in \mathbf{Z}^*$ are o infinitate de divizori naturali, fals.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$, $\forall x > 1$.

b) $f''(x) < 0$, $\forall x > 1$, deci funcția f' e strict descrescătoare pe $(1, \infty)$.

c) Considerăm $k \in (1, \infty)$. Funcția f este o funcție Rolle pe $[k, k+1]$ și din teorema lui Lagrange deducem că există $c \in (k, k+1)$ astfel încât $\frac{f(k+1) - f(k)}{k+1 - k} = f'(c) \stackrel{\text{a)}}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow f(k+1) - f(k) = \frac{1}{c \cdot \ln c}.$$

d) Se folosește punctul c) și monotonia funcției f' .

e) Din d) se arată că $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, avem $b_{n+1} - b_n < 0$ și $c_{n+1} - c_n > 0$,

deci sirul $(b_n)_{n \geq 2}$ este strict descrescător iar sirul $(c_n)_{n \geq 2}$ este strict crescător.

f) Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, avem $b_n - c_n > 0$ și folosind monotonia celor două siruri deducem: $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $c_2 < c_n < b_n < b_2$.

Obținem că sirurile $(b_n)_{n \geq 2}$ și $(c_n)_{n \geq 2}$ sunt convergente, fiind monotone și mărginite.

Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$.

Trecând la limită în (1) deducem $b - c = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

g) Deoarece sirul $(b_n)_{n \geq 2}$ este convergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + \ln(\ln n)) = +\infty$.

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(2^n + 1) \cdot \ln(2^n + 1)} + \frac{1}{(2^n + 2) \cdot \ln(2^n + 2)} + \dots + \frac{1}{3^n \cdot \ln(3^n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{3^n} - a_{2^n}) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{3^n} - b_{2^n}) + \lim_{n \rightarrow \infty} (f(3^n) - f(2^n)) = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right).$$