

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta069

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{1+2i}{4+3i}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1, -2, -3)$ la punctul $E(1, 2, 3)$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 25$ dusă prin punctul $P(4, 3)$.
- (4p) d) Să se arate că $\sin 4 < 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 1)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$(2+i)^2 = a + bi.$$

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se arate că $C_{x+1}^{y+1} = C_x^{y+1} + C_x^y$, $\forall x, y \in \mathbf{N}^*$, $x > y$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^2 + \hat{x} + \hat{4} = \hat{0}$.
- (3p) c) Să se determine numărul funcțiilor bijective definite pe mulțimea $\{1, 2, 3\}$ cu valori în mulțimea $\{5, 6, 7\}$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x - 5^x - 20 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze produsul tuturor rădăcinilor polinomului $f = X^4 + X^3 - X^2 + X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + x^2$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Spunem că matricea $M \in M_2(\mathbf{R})$ este *nilpotentă*, dacă există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $M^n = O_2$.

- (4p) a) Să se verifice că matricele O_2 și J sunt *nilpotente*.
- (4p) b) Să se arate că matricea K nu este nici inversabilă nici *nilpotentă*.
- (4p) c) Să se arate că, dacă matricea $X \in M_2(\mathbf{R})$, $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, atunci avem identitatea $X^2 - (p+s)X + (ps-rq)I_2 = O_2$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ verifică relația $A^2 = O_2$, atunci $a+d=0$ și $ad-bc=0$.
- (2p) e) Să se arate că, dacă matricea $B \in M_2(\mathbf{R})$ este *nilpotentă*, atunci $B^2 = O_2$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ sunt *nilpotente* și $A \cdot B = B \cdot A$, atunci $A+B$ este *nilpotentă*.
- (2p) g) Să se arate că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice *nilpotente*.

SUBIECTUL IV (20p)

- (4p) a) Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1+a+\dots+a^n+\frac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $\forall a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
- (4p) b) Să se deducă relația $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - \dots + (-1)^n (\sqrt{x})^n + (-1)^{n+1} \frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) c) Să se arate că $0 \leq \frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}} \leq (\sqrt{x})^{n+1}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{(\sqrt{x})^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx = 0$, $\forall b \in [0,1]$.
- (2p) e) Să se calculeze integrala $\int_0^b \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$, unde $b > 0$.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$, $\forall x \in [0,1]$.
- (2p) g) Să se arate că există $x \in (0,1)$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right) \in \mathbf{Q}$.

Varianta 069

Subiectul I:

- a) $\left| \frac{1+2i}{4+3i} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$. b) $|DE| = 2\sqrt{14}$. c) $4x + 3y = 25$.
d) $\sin 4 < 0$, deoarece $4 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. e) $A_{\Delta} = \frac{1}{2}$, f) $a = 3, b = 4$.

Subiectul II:

- 1) a) Se verifică relația prin calcul.
b) Probabilitatea evenimentului ca $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ verifică $\hat{x}^2 + \hat{x} + \hat{4} = \hat{0}$ este $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
c) Numărul funcțiilor bijective definite pe $\{1, 2, 3\}$ cu valori în $\{5, 6, 7\}$ este $3! = 6$.
d) Ecuatia are soluția $x=1$.
e) Din relațiile lui Viète: $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$.

- 2) a) $f'(x) = e^x + 2x, \forall x \in \mathbf{R}$. b) $\int_0^1 f(x) dx = \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = e - \frac{2}{3}$.
c) $f''(x) = e^x + 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ convexă pe \mathbf{R} . d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = e + 2$.
e) $e^x > 0, x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

Subiectul III:

- a) $O_2^1 = O_2, J^2 = O_2 \Rightarrow O_2, J$ sunt nilpotente.
b) $K^2 = K \neq O_2 \Rightarrow K^n = K, \forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow K^n \neq O_2, \forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow K$ nu este nilpotentă.
 $\det K = 0 \Rightarrow$ nu există $K^{-1} \in M_2(\mathbf{R})$.
c) Prin calcul se verifică relația dată.
d)
Din $A^2 = O_2 \Rightarrow (\det A)^2 = 0 \Rightarrow \det A = 0$
 $\Rightarrow ad - bc = 0$ și $(a+d)A = 0$, deci $a+d = 0$ sau $A = 0$ care da tot $a+d = 0$.
e) Fie $B \in M_2(\mathbf{R})$ nilpotent și $n \in \mathbf{N}$ astfel că $B^n = O_2$ și $B^{n-1} \neq O_2$. Avem $\det B = 0$ și
 $B^n = (trB)B^{n-1} \Leftrightarrow 0 = (trB)B^{n-1} \Rightarrow trB = 0$
f) $A^n = 0, B^m = 0 \Rightarrow (A+B)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k A^k \cdot B^{m+n-k} = 0$, deoarece $k \geq n$ sau $m+n-k \geq m$.
g) Presupunem că $\exists A_i \in M_2(\mathbf{R})$ nilpotentă a.î. $I_2 = \sum_{i=1}^n A_i$. Deoarece A_i nilpotentă \Rightarrow
 $\Rightarrow A_i^2 = O_2 \Rightarrow tr(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n (a_i + d_i) = 0 \neq trI_2 = 2$ (fals).

Subiectul IV:

- a) $1 + a + \dots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}, \forall a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

b) În pct. a), înlocuim $-\sqrt{x}$ în locul lui a și obținem relația cerută.

$$c) \sqrt{x} \geq 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} \quad (1) \text{ și } \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq \sqrt{x}^{n+1} \quad (2).$$

din (1), (2) \Rightarrow inegalitatea cerută.

$$d) \text{ Din c) } \Rightarrow 0 \leq \int_0^b \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx \leq \int_0^b \sqrt{x}^{n+1} dx, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^b \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx \leq \frac{2 \cdot b^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \text{ și din } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \begin{cases} 0, & b \in [0,1] \\ 1, & b=1 \end{cases}$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+3} \cdot b^{\frac{n+3}{2}} = 0, \forall b \in [0,1] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx = 0.$$

$$e) I_1 = \int_0^b \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int_1^{1+\sqrt{b}} \frac{1}{t} \cdot 2(t-1) dt = 2\sqrt{b} - 2\ln(1+\sqrt{b})$$

$$(1+\sqrt{x} = t \Rightarrow x = (t-1)^2 = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) = 2(t-1)dt \text{ și } x_1 = 0, x_2 = b \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 1 + \sqrt{b}).$$

f) Din b) avem

$$\int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = t - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \dots + \left. \frac{(-1)^n \cdot t^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right|_0^x + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^x \frac{\sqrt{t}^{n+1}}{1+\sqrt{t}} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x + \frac{(-1)x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right] + L, \text{ unde}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{\sqrt{t}^{n+1}}{1+\sqrt{t}} dt = 0 \text{ (din d) }. \text{ Rezultă relația cerută.}$$

$$g) \text{ Din e), f) } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x + \frac{(-1)x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right] = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = F(x)$$

F fiind funcție continuă, neconstantă, deci imaginea să este un interval care conține și numere rationale.