

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**

Varianta068

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine distanța dintre punctele $A(-1,2)$ și $B(2,-1)$.
- (4p) b) Să se determine aria triunghiului ABC dacă $AB = AC = 4\sqrt{2}$ și $BC = 10$.
- (4p) c) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.
- (4p) d) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3-i}{1+2i}$.
- (2p) e) Să se calculeze cosinusul unghiului determinat de diagonala unui cub cu o față laterală a sa.
- (2p) f) Să se calculeze $\cos x$, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

- (3p) a) Să se calculeze $(f \circ f)(2)$.
- (3p) b) Să se arate că $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ să verifice relația $f(x) \leq 5$.
- (3p) d) Să se calculeze suma $f(1) + f(2) + \dots + f(20)$.
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $f(\log_2 x) = 1$, $x \in (0, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (3p) b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) d) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Notăm cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a și cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a . Se consideră $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, și funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] - [nx].$$

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (4p) b) Să se verifice că $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $\forall x \in \mathbf{R}$, există $k \in \mathbf{Z}$, astfel încât $0 \leq x - \frac{k}{n} < \frac{1}{n}$.
- (2p) d) Să se arate că $f(x) = 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$.
- (2p) e) Să se arate că $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s < 1$ și $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_t < 1$, unde $s, t \in \mathbf{N}^*$ și $[x + a_1] + [x + a_2] + \dots + [x + a_s] = [x + b_1] + [x + b_2] + \dots + [x + b_t]$, $\forall x \in \mathbf{R}$, atunci $s = t$ și $\{a_1, a_2, \dots, a_s\} = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s < 1$ și $[x + a_1] + [x + a_2] + \dots + [x + a_s] = [sx]$, $\forall x \in \mathbf{R}$, unde $s \in \mathbf{N}^*$, atunci $\{a_1, a_2, \dots, a_s\} = \left\{0, \frac{1}{s}, \dots, \frac{s-1}{s}\right\}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f'_n(x) = f_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se verifice că $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + f_n(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $f_2(x) \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se verifice că $1 + \int_0^x f_n(t) dt = f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_{2n}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și că ecuația $f_{2n-1}(x) = 0$ are soluție unică în \mathbf{R} , $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că funcția f_{2007} este bijectivă.
- (2p) g) Să se arate că funcția f_{2008} este convexă pe \mathbf{R} .

Varianta 068

Subiectul I:

a) $3\sqrt{2}$. b) $5\sqrt{7}$. c) 0. d) $\sqrt{2}$. e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. f) $\cos x = \frac{4}{5}$.

Subiectul II:

1. a) $(f \circ f)(2)=2$. b) $f \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0$ "A". c) $P=3/4$. d) 1810. e) $x=8$.

2. a) $f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2}$. b) $f'(x) = \frac{8x^3 - 1}{x^2}$. Pentru $\forall x > 1 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strict crescatoare pe $(1, \infty)$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 7$. d) $f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3} = \frac{8x^3 + 2}{x^3}, \forall x > 0$. Deci f este convexa pe $(0, \infty)$ \Rightarrow nu are nici un punct de inflexiune e) $\int_1^e f(x) dx = \frac{4e^3}{3} - \frac{1}{3}$

Subiectul III:

a) $f(0) = [0] + \left[\frac{1}{n} \right] + \left[\frac{2}{n} \right] + \dots + \left[\frac{n-1}{n} \right] - [0] = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 - 0 = 0$

b) $f(x + \frac{1}{n}) = \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] + [x+1] - [nx+1] = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$

c) $0 \leq x - \frac{k}{n} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} \Leftrightarrow k \leq nx < k+1$, de unde rezulta $k = [nx]$.

d) Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{n} \right)$ avem: $[x] = \left[x + \frac{1}{n} \right] = \left[x + \frac{2}{n} \right] = \dots = \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx] = 0$.

e) Conform b) functia f este periodica si $T = \frac{1}{n}$ este perioada a functiei si pentru $x \in \left[0, \frac{1}{n} \right)$ avem $f(x) = 0$, deci $f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$

f) Punand $x=1$ in relatia data obtinem $s=t$.

Presupunem ca $a_s \neq b_s$, de exemplu $a_s < b_s$ si alegem $x \in (1-b_s, 1-a_s) \subset (0,1) \Rightarrow$

$$[x+a_i] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^s [x+a_i] = 0. \text{ Deoarece } x, b_i \in [0,1] \Rightarrow [x+b_i] \geq 0, x+b_i \text{ fiind pozitiv si}$$

$x+b_s > 1-b_s + b_s = 1$. De aici $\sum_{i=1}^s [x+b_i] \geq 1$. Deci $a_s = b_s$ si repetand rationamentul rezulta succesiv

$$a_{s-1} = b_{s-1}, \dots, a_1 = b_1.$$

g) $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s < 1$ si $[x+a_1] + [x+a_2] + \dots + [x+a_s] = [sx]$

Conform c) avem $[x] + [x + \frac{1}{s}] + \dots + [x + \frac{s-1}{s}] = [sx]$

Rezulta $\sum_{i=1}^s [x+a_i] = \sum_{i=1}^s [x + \frac{i-1}{s}]$. Deci $\sum_{i=1}^s [x+a_i] = \sum_{i=1}^s [x+b_i]$ conform pct. f)

$$\{a_1, a_2, \dots, a_s\} = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}.$$

Subiectul IV:

a) $f'_n(x) = \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n} = f_{n-1}(x), \forall n \in \mathbf{N}$

b) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + f_n(x), \forall n \in \mathbf{N}^*$

c) $f_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$

$f_2(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$ adevarat $\forall x \in \mathbf{R}$

d) $x + \int_0^x f_n(t) dt = 1 + F_n(x) - F_n(0)$, unde F_n este o primitiva a functiei f_n

Conform a) f_{n+1} este o primitiva a lui $f_n \Rightarrow x + \int_0^x f_n(t) dt = 1 + f_{n+1}(x) - f_{n+1}(0) = f_{n+1}(x)$

e) Pentru $n=2$, afirmația devine $f_2(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ adevărat conform c)

$f_2(x) \geq \frac{1}{2} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Demonstram ca daca $f_{2k}(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_{2k+2}(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, pentru $k \in \mathbf{N}$

Conform a) $f'_{2k+1}(x) = f_{2k}(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_{2k+1}$ strict crescatoare \Rightarrow are cel mult o rădăcină .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{2n-1}(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2n+1}(x) = +\infty, f_{2k+1}$$
 continua \Rightarrow are exact o radacina. .

Deoarece

Fie α radacina functiei f_{2k+1} . Avem $f_{2k+2}(\alpha) \geq f_{2k+1}(\alpha) + \frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

f) $f'_{2007}(x) = f_{2006}(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_{2007}$ strict crescatoare pe \mathbf{R} , deci injectiva.

Surjectivitatea rezulta din $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{2007}(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2007}(x) = +\infty$, si f continua pe \mathbf{R}

g) $f_{2008}''(x) = f_{2006}(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_{2008}$ convexă pe \mathbf{R} .