

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta067

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1, 2, 3)$ la punctul $E(0, -1, 2)$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $4x^2 - y^2 = 15$ dusă prin punctul $P(2, 1)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(4, 2)$, $M(3, 3)$ și $N(1, 5)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 1, 1)$ și $D(3, 2, 1)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1, 1, 3)$, $B(1, 3, 1)$ și $C(3, 1, 1)$ să aparțină planului $x + ay + bz + c = 0$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se găsească un polinom $g \in \mathbf{Z}_4[X]$, de gradul întâi, care să nu aibă rădăcini în \mathbf{Z}_4 .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{0}$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x + 2$, are inversa $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(0)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(3x^2 + 5) = \log_2(x^4 + 7)$.
- (3p) e) Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X + 2$.

2.

- (3p) a) Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, derivabilă, astfel încât $f'(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se găsească o funcție continuă $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, neconstantă, astfel încât $\int_0^1 f(x) dx = 7$.
- (3p) c) Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, strict descrescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 xe^{x+1} dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

Varianta 067

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Z} \right\}$.

- (4p) a) Să se arate că dacă $A \in M$ și $\det(A) = 0$, atunci $A = O_2$.
- (4p) b) Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbf{N}$, numărul $a^2 + 1$ nu se divide cu 3.
- (4p) c) Să se arate că $\det(A) \neq -1$, pentru orice $A \in M$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.
- (2p) e) Dacă $A \in M$, $A \neq O_2$ și $A^{-1} \in M$ să se arate că $\det(A) = 1$.
- (2p) f) Să se arate că există cel puțin 2007 matrice $A \in M$ care verifică $\det(A) = 1$.
- (2p) g) Știind că pentru $n \in \mathbf{N}^*$ oarecare, există $a_n, b_n \in \mathbf{Z}$, astfel încât

$$\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & 3b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}, \text{ să se arate că } a_n = \frac{1}{2} \left[(a + \sqrt{3}b)^n + (a - \sqrt{3}b)^n \right] \text{ și}$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(a + \sqrt{3}b)^n - (a - \sqrt{3}b)^n \right].$$

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru $t \in \mathbf{R}$, se consideră funcția $f_t : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_t(x) = x^3 + t^4 x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'_t(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x)$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f_t este bijectivă pentru orice $t \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că există o unică funcție $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care verifică relația $(g(t))^3 + t^4 g(t) - t^3 = 0$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că $g(0) = 0$.
- (2p) f) Să se arate că $g(t) = f_t^{-1}(t^3)$, $\forall t \in \mathbf{R}$ și că funcția g este continuă pe \mathbf{R} .
- (2p) g) Să se arate că funcția g este derivabilă în $t = 0$ și $g'(0) = 1$.

Varianta 067

Subiectul I

a) 0. b) $\sqrt{11}$. c) $8x - y = 15$. d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L, M, N$ coliniare. e) $V = \frac{1}{3} \cdot f \cdot \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -5 \end{cases}$

Subiectul II

1. a) $g = \hat{2}x + 1$, $g \in \mathbf{Z}_4[X]$ nu are radacini in \mathbf{Z}_4 : $g(\hat{0}) = \hat{1}$, $g(\hat{1}) = \hat{2}$, $g(\hat{2}) = \hat{1}$, $g(\hat{3}) = \hat{3}$.

b) $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ care verifica relatia $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ sunt $\hat{0}, \hat{3} \Rightarrow$ probabilitatea ceruta este $\frac{1}{3}$.

c) Dacă g este inversa funcției f , atunci $g(0) = x$, pentru care $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x^2 - x + 2 = 0$ ($\Delta < 0$).

Deci $g(0) = -1$.

d) $S = \{-1, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$; e) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$

2. a) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, f este derivabila, $f'(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \int f'(x) dx = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$

$f(x) = \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ este o functie pentru care avem proprietatea din enunt;

b) $f(x) = 14x$; c) $f''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este convexa pe \mathbf{R} ;

d) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -x + 1$ este strict descrescătoare pe \mathbf{R} ; e) $\int_0^1 xe^{x+1} dx = e$.

Subiectul III

a) $\det A = 0 \Leftrightarrow a^2 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b\sqrt{3})(a + b\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow a = b\sqrt{3}$ sau $a = -b\sqrt{3}$.

Avand în vedere că $a, b \in \mathbf{Z} \Rightarrow a = b = 0$;

b) $a \in \mathbf{N}$; avem urmatoarele cazuri :

- dacă $a = 3k$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow a^2 + 1 = 9k^2 + 1 \Rightarrow 3$ nu divide $a^2 + 1$;

- dacă $a = 3k + 1$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow a^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3k(3k + 2) + 2 \Rightarrow 3$ nu divide $a^2 + 1$;

- dacă $a = 3k + 2$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow a^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 4 + 1 = 3k(3k + 4) + 5 \Rightarrow 3$ nu divide $a^2 + 1$;

Deci 3 nu divide $a^2 + 1$, $\forall a \in \mathbf{N}$.

c) $\det A = -1 \Leftrightarrow a^2 - 3b^2 = -1$, $a, b \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a^2 + 1 = 3b^2$, $a, b \in \mathbf{Z}$. Dar $3 \nmid 3b^2$, 3 nu divide $a^2 + 1$ (b)

deci nu există $a, b \in \mathbf{Z}$ pentru care $\det A = -1$.

d) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $B = \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}$, $c, d \in \mathbf{Z}$. $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 3bd \end{pmatrix}$

$ac + 3bd, ad + bc \in \mathbf{Z} \Rightarrow A \cdot B \in M$. Dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

e) Avem $A^{-1} \in M \Rightarrow \det A \neq 0$; notam $\det A = d$; $a, b \in \mathbf{Z} \Rightarrow \det A \in \mathbf{Z}$. Avand in vedere ca

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix} \text{ obtinem } \det A^{-1} = \frac{1}{d^2} d = \frac{1}{d};$$

Deci $A^{-1} \in M$ si elementele matricii A^{-1} sunt numere intregi $\Rightarrow \det A^{-1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{1}{d} \in \mathbf{Z}, d \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow d \in \{-1, 1\}$. La punctul c) am demonstrat ca $\det A \neq -1, \forall A \in M \Rightarrow d = \det A = 1$.

f) Daca $A \in M$ si $\det A = 1$, atunci $a^2 - 3b^2 = 1, a, b \in \mathbf{Z}$. Exista astfel de matrice, de exemplu pentru $a = 2, b = 1$.

$$\text{Daca } A = \begin{pmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \text{ cu } a_1, b_1 > 0 (a_1, b_1 \in \mathbf{Z}) \text{ atunci } A^n = \begin{pmatrix} a_n & 3b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ cu } a_n, b_n > 0 (a_n, b_n \in \mathbf{Z}), n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\text{Se demonstreaza prin inducție matematică: } P(n): A^n = \begin{pmatrix} a_n & 3b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ cu } a_n, b_n > 0 (a_n, b_n \in \mathbf{Z}), n \in \mathbf{N}^*$$

$$\text{Deci } A^n = \begin{pmatrix} a_n & 3b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ cu } a_n, b_n > 0 (a_n, b_n \in \mathbf{Z}), n \in \mathbf{N}^*, \text{ atunci } A^n \neq I_2, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Daca $\det A = 1$, atunci $\det A^n = (\det A)^n = 1 \Rightarrow \{A, A^1, \dots, A^n, \dots\} \subset M$ si $A^i \neq A^j$ oricare ar fi $i \neq j$ (in caz contrar $A^{i-j} = I_2$, dar aceasta este imposibil).

Deci multimea M are o infinitate de elemente pentru care $\det A = 1 \Rightarrow \exists$ exista cel putin 2007 matrice $A \in M$ care verifică $\det A = 1$.

g) Se demonstrează prin inducție matematică folosind recurențele:
 $a_{n+1} = a_n \cdot a + 3b_n \cdot b; b_{n+1} = b_n \cdot a + a_n \cdot b$.

Subiectul IV

Fie $t \in \mathbf{R}, f_t : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_t(x) = x^3 + t^4 x$.

a) $f'_t(x) = 3x^2 + t^4$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + t^4 x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + t^4 x) = \infty, (t^4 \geq 0, \forall t \in \mathbf{R})$.

c) $f'_t(x) = 3x^2 + t^4 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}. f'_t(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + t^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ t^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_t$ este strict crescatoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow f_t$ injectiva.

f_t continua pe $\mathbf{R} \Rightarrow f_t$ are proprietatea lui Darboux
 $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = -\infty \text{ si } \lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im } f_t = \mathbf{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_t$ surjectiva. Deci f_t este bijectiva.

d) Existenta functiei g revine la a arata ca ecuatia $f_t(g(t)) = t^3$ in necunoscuta $g(t)$, are o solutie unica, ceea ce rezulta din bijectivitatea lui f_t .

e) Functia $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ verifica relatia $g^3(t) + t^4 g(t) - t^3 = 0, \forall t \in \mathbf{R}$.

Fie $t = 0 \Rightarrow (g(0))^3 \Leftrightarrow g(0) = 0$.

f) La punctul d) am obtinut relatia $f(g(t)) = t^3, \forall t \in \mathbf{R}$ si am demonstrat ca functia f_t este bijectiva
 $\Rightarrow \exists f_t^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ (astfel incat $f_t^{-1}(y) = x$ pentru care $f_t(x) = y$).

Din $f_t(g(t)) = t^3, \forall t \in R \Rightarrow g(t) = f_t^{-1}(t^3), \forall t \in \mathbf{R}$. Functia f_t este continua pe $\mathbf{R} \Rightarrow$
 $\Rightarrow g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(t) = f_t^{-1}(t^3)$ este continua fiind compunere de functii continue pe \mathbf{R} .

g) Din punctul d) obtinem:

$$g^3(t) + t^4 g(t) - t^3 = 0; \quad g^3(t) = t^3(1 - t \cdot g(t)); \quad g(t) = t^3 \sqrt[3]{1 - t \cdot g(t)}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - t \cdot g(t)} = 1.$$