

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta066

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{3} + 2i$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1, 2, 3)$ la punctul $E(3, 2, 1)$
- (4p) c) Să se scrie ecuația cercului cu centrul în punctul $C(1, 2)$ și raza 2.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$.
- (2p) e) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $L(1, 2, 3)$, $M(3, 1, 2)$ și $N(2, 3, 1)$ să aparțină planului $x + ay + bz + c = 0$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe
- $$(\sqrt{2} + i\sqrt{5})^2 = a + bi .$$

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se determine numărul polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2 din $\mathbf{Z}_3[X]$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$ să verifice relația $\hat{x}^4 = \hat{1}$.
- (3p) c) Să se determine numărul de termeni raționali din dezvoltarea binomului $(2 + \sqrt{3})^{20}$
- (3p) d) Să se compare numerele $\log_2 3$ și $\log_3 2$.
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f = X^3 + X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + x^2$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Descărcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

Varianta 066

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și funcția

$$f : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R}), \quad f(X) = AX + XA.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) b) Să se calculeze $f(O_2)$ și $f(I_2)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(aX) = af(X)$, $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$ și $\forall a \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) e) Să se găsească o bază a spațiului vectorial $(M_2(\mathbf{R}), +)$ peste corpul de scalari $(\mathbf{R}, +, \cdot)$.
- (2p) f) Să se arate că ecuația $f(X) = O_2$ are soluție unică în $M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) g) Să se arate că funcția f este bijectivă.

SUBIECTUL IV (20p)

- (4p) a) Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1 + a + \dots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $\forall a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

- b) Să se deducă relația

(4p)
$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} = 1 - \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 - \dots + (-1)^n (\sqrt[3]{x})^n + (-1)^{n+1} \frac{(\sqrt[3]{x})^{n+1}}{1+\sqrt[3]{x}}, \quad \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}.$$

- (4p) c) Să se arate că $0 \leq \frac{(\sqrt[3]{x})^{n+1}}{1+\sqrt[3]{x}} \leq (\sqrt[3]{x})^{n+1}$, $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (2p) d) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{(\sqrt[3]{x})^{n+1}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = 0$, $\forall b \in [0,1]$.

- (2p) e) Să se calculeze integrala $\int_0^b \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$, unde $b > 0$.

- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{3}+1}}{\frac{n}{3}+1} \right) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[3]{t}} dt$,
 $\forall x \in [0,1]$.

- (2p) g) Să se arate că există $x \in (0,1)$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{3}+1}}{\frac{n}{3}+1} \right) \in \mathbf{Q}.$$

Varianta 066

Subiectul I

a) $\sqrt{7}$. b) $2\sqrt{2}$. c) $C(c, 2): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. d) $S_{ABC} = 1$.

e)
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0$$
. f) $a = -3, b = 2\sqrt{10}$.

Subiectul II

1. a) $\text{grad } P = 0 \Rightarrow 3$ polinoame. $\text{grad } P = 1 \Rightarrow 6$ polinoame. $\text{grad } P = 2 \Rightarrow 18$ polinoame. deci 27 de polinoame de grad mai mic sau egal cu 2 in $\mathbf{Z}_3[x]$.

b) Probabilitatea cerută este $\frac{4}{5}$. c) numărul termenilor raționali este 11. d) $\log_2 3 > \log_3 2$.

e) Dacă x_1, x_2, x_3 , sunt radacinile polinomului $f = x^3 + x^2 + 1$, atunci
 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-1)^2 - 2 \cdot 0 = 1$.

2. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2^x + x^2$

a) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x$. b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{3}$.

c) $f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este convexă pe \mathbf{R} .

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2(\ln 2 + 1)$. e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x \cdot \ln 2 + 2x}{2^x + x^2} = \frac{2 \ln 2 + 2}{3}$.

Subiectul III

a) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2$. b) $f(O_2) = A \cdot O_2 + O_2 \cdot A = O_2$,

$f(I_2) = A \cdot I_2 + I_2 \cdot A = A + A = 2A$.

c) $f(aX) = A \cdot aX + aX \cdot A = a \cdot AX + a \cdot XA = a \cdot (AX + XA) = a \cdot f(X) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(aX) = af(x), \forall x \in M_2(\mathbf{R}), \forall a \in \mathbf{R}$.

d) $f(X + Y) = A(X + Y) + (X + Y)A = A \cdot X + A \cdot Y + X \cdot A + Y \cdot A =$
 $= (AX + XA) + (AY + YA) = f(X) + f(Y) \Rightarrow f(X + Y) = f(X) + f(Y), \forall X, Y \in M_2(\mathbf{R})$.

e) Se arata ca in spatiul vectorial $M_2(\mathbf{R})$ multimea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

formeaza o baza.

f) și g) Dacă $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ din $f(X) = Y$ obținem sistemul de ecuații

$$\text{liniare: } \begin{cases} x_2 - 3x_3 = y_1 \\ -3x_1 + 2x_3 - 3x_4 = y_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = y_3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = y_4 \end{cases} \quad \text{cu determinantul } \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sistemul are soluție unică iar pentru $Y = 0$ obținem $X = 0$.

Subiectul IV

a) $1 + a + a^2 + \dots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1} - 1}{a-1} + \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1} - 1}{a-1} - \frac{a^{n+1}}{a-1} = \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}, \forall n \in \mathbf{N}$
 $\forall a \in \mathbf{R} - \{1\}.$

b) Se înlocuiește a în relația de la punctul a) cu $-\sqrt[3]{x}$.

c) Avem $\frac{(\sqrt[3]{x})^{n+1}}{1 + \sqrt[3]{x}} \geq 0, \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbf{N}^*$ iar

$$\frac{(\sqrt[3]{x})^{n+1}}{1 + \sqrt[3]{x}} \leq (\sqrt[3]{x})^{n+1} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^{n+1} \leq (\sqrt[3]{x})^{n+1} + (\sqrt[3]{x})^{n+2} \Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt[3]{x})^{n+2} \quad \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbf{N}^*. \text{ Deci}$$

$$0 \leq \frac{(\sqrt[3]{x})^{n+1}}{1 + \sqrt[3]{x}} \leq (\sqrt[3]{x})^{n+1}, \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

d) Se integrează relațiile de la punctul c) și rezulta $0 \leq \int_0^b \frac{(\sqrt[3]{x})^{n+1}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx \leq \frac{b^{\frac{n+1}{3}+1}}{\frac{n+1}{3} + 1}$ și trecând

la limită, având în vedere faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{\frac{n+1}{3}+1}}{\frac{n+1}{3} + 1} = 0$, unde $b \in [0, 1]$, obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{(\sqrt[3]{x})^{n+1}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = 0, \forall b \in [0, 1].$$

e) Se notează $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 = \varphi(t) \Rightarrow dx = 3t^2 dt$. Dacă $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = b \Rightarrow t = \sqrt[3]{b}$.
 Obținem

$$I = \int_0^{\sqrt[3]{b}} \frac{3t^2}{1+t} dt = 3 \int_0^{\sqrt[3]{b}} \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = 3 \int_0^{\sqrt[3]{b}} \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} t^2 - t + \ln(t+1) \right) \Big|_0^{\sqrt[3]{b}} =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{b}^2 - \sqrt[3]{b} + \ln(\sqrt[3]{b} + 1) \right).$$

f) Integrând relația de la punctul b) de la 0 la x obținem :

$$\int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[3]{t}} dt = x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{\frac{n}{3}+1}}{\frac{n}{3}+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(\sqrt[3]{t})^{n+1}}{1+\sqrt[3]{t}} dt \stackrel{not}{=}$$

$$= a_n(x) + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{(\sqrt[3]{t})^{n+1}}{1+\sqrt[3]{t}} dt \Leftrightarrow a_n(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[3]{t}} dt + (-1)^n \int_0^x \frac{(\sqrt[3]{t})^{n+1}}{1+\sqrt[3]{t}} dt.$$

Din d) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \int_0^x \frac{(\sqrt[3]{t})^{n+1}}{1+\sqrt[3]{t}} dt = 0, \forall x \in [0, 1]$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[3]{t}} dt, \forall x \in [0, 1]$.

g) Din punctul f) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[3]{t}} dt, \forall x \in [0, 1]$. Funcția $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[3]{t}} dt$ este o funcție strict crescătoare pe $[0, 1]$ și continuă. Dacă $r \in (g(0), g(1)) \cap \mathbf{Q}$ atunci din proprietatea lui Darboux $\Rightarrow \exists x \in (0, 1)$ astfel încât $g(x) = r$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{\frac{n}{3}+1}}{\frac{n}{3}+1} \right) \in \mathbf{Q}.$$