EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….065

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul $A\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

(4p) **c)** Să se arate că punctul $A_n\left(\frac{n^2-1}{n^2+1},\frac{2n}{n^2+1}\right)$ este pe cercul de ecuație $x^2+y^2=1$, $\forall n\in \mathbf{N}$.

(4p) **d)** Să se arate că pe cercul de ecuație $x^2+y^2=1$ există cel puțin 2007 puncte cu ambele coordonate raționale.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 3, 2)$, $B(3, 2, 1)$, $C(2, 1, 3)$ și $D(0,0,0)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $P(2,3)$ și $Q(3,2)$ să fie pe dreapta $x+ay+b=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se verifice identitatea $\hat{x}^3=\hat{x}$, $\forall \hat{x}\in \mathbf{Z}_6$.

(3p) **b)** Să se arate că $(\hat{x}+\hat{y})^3=\hat{x}^3+\hat{y}^3$, $\forall \hat{x},\hat{y}\in \mathbf{Z}_6$

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^7+x+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+7)=\log_2(2x^2+3x+7)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f=X^3-X^2-24X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(x^2+4)-\ln(x^2+1)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se arate că $0<f(x)\le \ln 4$, $\forall x\in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, mulţimea $C(A)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix} \middle|\, a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$ şi

funcţia $f:C(A)\to C(A)$, $f(X)=X^6$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze A^2 şi A^3.

(4p) **c)** Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $X\in M_3(\mathbf{R})$ şi $X\cdot A=A\cdot X$, atunci $X\in C(A)$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $P,Q\in C(A)$, atunci $P+Q\in C(A)$ şi $P\cdot Q\in C(A)$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$ şi $f(X)=O_3$, atunci $X=O_3$.

(2p) **g)** Să se arate că funcţia f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $a_n=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}\cos\frac{a}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{a}{2^n}$, $n\geq 1$,

$a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos x$.

Se presupun cunoscute relaţiile $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $1+\cos x=2\cdot\cos^2\frac{x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se arate că $f'(x)=0$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f(0)$ şi $f\left(\frac{\pi}{2006}\right)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_0^{2006\pi} f(x)\,dx$.

(2p) **d)** Să se arate că pentru orice $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $n\in\mathbf{N}^*$, are loc egalitatea $a_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$.

(2p) **e)** Să se verifice egalităţile $\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ şi $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{\sin a}{a}$, $\forall\, a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **g)** Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n\text{ radicali}}=\frac{2}{\pi}$$

Varianta 065

Subiectul I

a) $\left|\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right|=1$.

b) $OA=1$.

c) Pentru $n\in\mathbf{N}$, A_n aparține cercului $\Leftrightarrow$ $x_n^2+y_n^2=1$, adevărat.

d) Pentru $n\in\mathbf{N}$, toate punctele A_n de la subpunctul **c)** au coordonatele raționale și aparțin cercului.

e) $V_{ABCD}=3$.

f) $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$.

Subiectul II

1.

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Se folosește punctul **a)**.

c) $g(1)=0$.

d) $x\in\{-3,0\}$.

e) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=49$.

2.

a) $f'(x)=-\frac{6x}{(x^2+4)(x^2+1)}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x)\,dx=\ln\frac{5}{8}$.

c) Evident, folosind semnul funcției f'.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{3}{5}$.

e) Din tabelul de variație rezultă că $\forall x\in\mathbf{R}$, $0<f(x)\le\ln 4$.

Subiectul III

a) $\det(A)=1$ și $\operatorname{rang}(A)=3$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ și $A^3=A^2\cdot A=I_3$.

c) Din **b)**, $A^{-1}=A^2$.

d) Se arată prin calcul direct.

e) Considerăm $P, Q \in C(A)$. Din **d)** rezultă că $PA = AP$ şi $QA = AQ$.

Avem $(P+Q)\cdot A = PA + QA = AP + AQ = A\cdot(P+Q)$, deci $P+Q \in C(A)$.

şi $(P\cdot Q)\cdot A = P\cdot(QA) = P\cdot(AQ) = (PA)\cdot Q = (AP)\cdot Q = A\cdot(PQ)$, deci $P\cdot Q \in C(A)$.

f) Se arată uşor că dacă $Y \in C(A)$ şi $Y^2 = O_3$ atunci şi $Y = O_3$ (1)

Fie $X \in C(A)$ pentru care $f(X) = X^6 = O_3$. $X \in C(A) \overset{e)}{\Rightarrow} X^3 \in C(A)$.

Folosind afirmația (1) rezultă imediat că $X^6 = O_3 \Rightarrow X = O_3$.

g) Avem $f(A) = f(I_3) = I_3$, deci f nu este injectivă.

Fie $B = -I_3 \in C(A)$. Se deduce că $\forall X \in C(A)$, $f(X) = X^6 \neq B$, deci f nu este surjectivă.

Subiectul IV

a) Se demonstrează prin calcul direct.

Deducem că există $k \in \mathbf{R}$ astfel încât $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = k$.

b) $f(0) = \frac{1}{2}$, deci $k = \frac{1}{2}$, de unde rezultă $f\left(\frac{\pi}{2006}\right) = \frac{1}{2}$.

c) $\int_0^{2006\pi} f(x)\,dx = 1003\,\pi$.

d) Avem $\forall n \in \mathbf{N}$ $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot \cos\frac{a}{2^{n+1}}$ şi se demonstrează prin inducție că pentru orice $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $n \in \mathbf{N}^*$, avem $a_n = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$.

e) Calcul direct.

f) Pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a}$.

g) $b_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ şi $b_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b_{n-1}}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi se demonstrează inductiv că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Folosind **d)** şi **f)** obținem, pentru $a = \frac{\pi}{4}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n\text{ radicali}} = \frac{2}{\pi}.$$