

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

**Varianta ....064**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine ecuația planului care trece prin punctul  $A(2, 1, 0)$  și care este perpendicular pe vectorul  $\vec{n}(1, 2, 3)$ .
- (4p) b) Să se determine ecuația tangentei în punctul  $A\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$  la elipsa de ecuație  $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ .
- (4p) c) Să se determine aria unui triunghi echilateral înscris în cercul de ecuație  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ .
- (4p) d) Să se dea exemplu de patru numere complexe de modul 1.
- (2p) e) Să se calculeze  $(\cos \pi + i \cdot \sin \pi)^{2007}$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\sin^2 \frac{\pi}{3}$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se determine  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $1+2+3+\dots+2n=55$ .
- (3p) b) Să se determine domeniul maxim de definiție  $D$  al funcției  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ .
- (3p) c) Să se determine toate tripletele de numere naturale  $(a, b, c)$  în progresie geometrică, știind că  $a \cdot b \cdot c=8$ .
- (3p) d) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f=X^3+X+1$  la polinomul  $g=X+1$ .
- (3p) e) Să se determine al treilea termen al dezvoltării  $\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$ ,  $x \in \mathbf{R}^*$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x)=x^{2007}-2007x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f''(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției  $f$ .
- (3p) c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\int_0^1 f''(x) dx$
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2007}} \int_0^n f'(x) dx$ .

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

**Varianta 064**

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $M, N \in M_2(\mathbf{R})$ , cu proprietatea  $M \cdot N = N \cdot M$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}) .$$

- (4p) a) Să se arate că  $\forall \alpha \in \mathbf{C}, \det(\alpha A) = \alpha^2 \cdot \det(A)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$ , unde  $\text{tr}(A) = a + d$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2 \cdot \det(X) + 2 \cdot \det(Y)$ ,  $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$ .
- (2p) d) Să se arate că  $(M + i \cdot N)(M - i \cdot N) = M^2 + N^2$ .
- (2p) e) Să se arate că  $\det(M + i \cdot N) = 0$  dacă și numai dacă  $\det(M - i \cdot N) = 0$ .
- (2p) f) Să se arate că dacă  $\det(M^2 + N^2) = 0$ , atunci  $\det(M) = \det(N)$ .
- (2p) g) Să se arate că dacă  $\det(M^2 + I_2) = 0$ , atunci  $M^2 + I_2 = O_2$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f_n : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F_n : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$\forall n \in \mathbf{N}^*$ , astfel încât  $f_n(x) = \ln(1 + \sin^n x)$ ,  $F_n$  este o primitivă a funcției  $f_n$  și

$$g_n(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f_n(t) dt.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $g_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .
- (4p) b) Să se demonstreze că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ ,  $g_n(x) = F_n(\arcsin x) - F_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .
- (4p) c) Să se demonstreze că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ ,  $g'_n(x) = \frac{\ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}$ .
- (2p) d) Să se demonstreze că pentru  $n \in \mathbf{N}^*$ , funcția  $g_n$  este strict monotonă pe  $(-1, 1)$  dacă și numai dacă  $n$  este număr par.
- (2p) e) Să se demonstreze că  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g_n(x) dx = - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x \cdot \ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g_n(x) dx = 0$ .
- (2p) g) Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Varianta 64

**Subiectul I.**

- a)  $x + 2y + 3z - 4 = 0$ .  
 b)  $3x + 8y - 5 = 0$   
 c) Aria căutată este  $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .  
 d) De exemplu, numerele complexe  $1, -1, i, -i$  au modulul egal cu 1.  
 e)  $(\cos \pi + i \cdot \sin \pi)^{2007} = -1$   
 f)  $\sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$ .

**Subiectul II.**
**1.**

- a)  $n = 5$ .  
 b)  $D = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ .  
 c) Soluțiile sunt tripletele  $(1, 2, 4), (2, 2, 2)$  și  $(4, 2, 1)$ .  
 d) Câtul împărțirii lui  $f$  la  $g$  este  $q = X^2 - X + 2$ , iar restul este  $r = -1$ .  
 e)  $T_3 = 24$ .

**2.**

- a)  $f''(x) = 2007 \cdot 2006 \cdot x^{2005}, \forall x \in \mathbf{R}$ .  
 b) Funcția  $f$  are două puncte de extrem.  
 c) Funcția  $f$  are un singur punct de inflexiune.  
 d)  $\int_0^1 f''(x) dx = 2007$ .  
 e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2007}} \int_0^n f'(x) dx = 1$ .

**Subiectul III.**

- a) Evident.  
 b) Se demonstrează prin calcul direct.  
 c) Se demonstrează prin calcul direct.  
 d) Evident, deoarece  $M \cdot N = N \cdot M$ .  
 e) Se calculează efectiv  $\det(M + i \cdot N) = u + i \cdot v$ , cu  $u, v \in \mathbf{R}$  și se arată că  $\det(M - i \cdot N) = u - i \cdot v$ , de unde rezultă concluzia.  
 f) Dacă  $\det(M^2 + N^2) = 0$ , din punctele d) și e) rezultă

$\det(M + i \cdot N) = \det(M - i \cdot N) = 0$  și folosind apoi punctele **c)** și **a)** rezultă concluzia.

**g)** Avem:  $\det(M^2 + I_2) = \det(M^2 + I_2^2) = 0 \Leftrightarrow \det(M) = \det(I_2) = 1$ .

Din punctul **b)** obținem

$$0 = \det(M^2 + I_2) = \det(\text{tr}(M) \cdot M) \stackrel{\text{a)}}{=} (\text{tr}(M))^2 \cdot \det(M) = (\text{tr}(M))^2, \text{ deci } \text{tr}(M) = 0.$$

Înlocuind în relația (1) obținem  $M^2 + I_2 = 0_2$ .

#### Subiectul IV.

**a)**  $g_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ .

**b)** Aplicând teorema Leibniz-Newton, obținem:  $g_n(x) = F_n(\arcsin x) - F_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

**c)** Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , funcția  $g_n$  este derivabilă pe  $(-1, 1)$  și derivând relația de la **b)** obținem:  $g'_n(x) = \frac{\ln(1+x^n)}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**d)** Avem:  $\forall x \in (0, 1)$ ,  $g'_n(x) > 0$ . Atunci, pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ , funcția  $g_n$  este strict monotonă pe  $(-1, 1)$   $\Leftrightarrow \forall x \in (-1, 1)$ ,  $g'_n(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in (-1, 1)$ ,  $\ln(1+x^n) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in (-1, 1)$ ,  $x^n > 0 \Leftrightarrow n$  este un număr par.

**e)** Se arată prin calcul direct.

$$\mathbf{f)} \quad \left| \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g_n(x) dx \right| \stackrel{\text{e)}}{=} \left| \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x \cdot \ln(1+x^n)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right| \leq \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left| \frac{x \cdot \ln(1+x^n)}{\sqrt{1-x^2}} \right| dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x \cdot \ln(1+x^n)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Obținem:  $0 < \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x \cdot \ln(1+x^n)}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln(1+x^n) dx,$

de unde rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x \cdot \ln(1+x^n)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$  și folosind (1) rezultă concluzia.

**g)** Aplicând regula lui l'Hospital și punctul **c)**, deducem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \right)^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\ln(1+x^{n+1})}{\ln(1+x^n)} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$