EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….063**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocaţională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{3}+i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanţa de la punctul $D(-1,-2,-3)$ la punctul $E(-4,-5,-6)$.

(4p) **c)** Să se determine produsul scalar al vectorilor $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2,0)$, $M(2,3,0)$ şi $N(3,4,0)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,3)$, $B(-1,4)$, şi $C(2,1)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{2+3i}{4-2i}=a+bi .$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $\hat{3}^{2007}$ în $\mathbf{Z_5}$.

(3p) **b)** Să se determine al cincilea termen al unei progresii aritmetice cu primul termen egal cu 1 şi cu raţia 2.

(3p) **c)** Dacă funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+x+1$ are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(3)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x^3+x=10$.

(3p) **e)** Să se determine suma tuturor rădăcinilor polinomului $f=X^4+X^3-X+1$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+2^x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1\frac{x^2}{x^3+10}dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi

mulțimea $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) \mid X \cdot A = A \cdot X\}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

(4p) **b)** Să se determine rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se determine $a, b, c \in \mathbf{C}$, astfel încât $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3$

(2p) **d)** Să se arate că dacă $U, V \in C(A)$, atunci $U \cdot V \in C(A)$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $X \in C(A)$, atunci există $a, b, c \in \mathbf{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $Y \in C(A)$ şi $Y^2 = O_3$, atunci $Y = O_3$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $Z \in C(A)$ şi $Z^{2007} = O_3$, atunci $Z = O_3$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3 + \{x\}(1 - \{x\})$ şi $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului real x.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f este continuă în punctul $x = 1$.

(4p) **c)** Să se verifice că $F(x) = 3x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$, $\forall x \in [0,1)$.

(2p) **d)** Să se arate că $3 \le f(x) \le 4$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$.

(2p) **g)** Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$, astfel încât funcția $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = F(x) - ax$ să fie periodică, având o perioadă egală cu 1.

Varianta 63

Subiectul I.

a) $\left|\sqrt{3}+i\right|=2$

b) $DE=3\sqrt{3}$.

c) $\vec{v}\cdot\vec{w}=18$.

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN}=2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $S_{ABC}=3$.

f) $a=\dfrac{1}{10}$, $b=\dfrac{4}{5}$.

Subiectul II.

1.

a) În mulțimea $\mathbf{Z}_5$, $\hat{3}^{2007}=\hat{2}$.

b) $a_5=9$.

c) $g(3)=1$.

d) $x=2$.

e) $x_1+x_2+x_3+x_4=-1$.

2.

a) $f'(x)=1+2^x\ln 2$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\ln 2}$.

c) $f''(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1+2\cdot\ln 2$.

e) $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x^3+10}\,dx=\dfrac{1}{3}\cdot\ln\dfrac{11}{10}$.

Subiectul III.

a) $\det(A)=-6$.

b) $\operatorname{rang}(A)=3$.

c) $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=1$.

d) Evident.

e) Se arată prin calcul direct.

f) Considerăm $Y\in C(A)$, astfel încât $Y^2=O_3$.

Din **e)** deducem că există $a, b, c \in \mathbf{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix}$.

Deoarece $Y^2 = \begin{pmatrix} a^2+3c^2 & 0 & 2ac \\ 0 & b^2 & 0 \\ 6ac & 0 & a^2+3c^2 \end{pmatrix} = O_3$, obținem $a = b = c = 0$, deci $Y = O_3$.

g) $Z^{2007} = O_3 \Rightarrow Z^{2048} = O_3 \Leftrightarrow \left(Z^{2^{10}}\right)^2 = O_3 \overset{f)}{\Leftrightarrow} Z^{2^{10}} = O_3 \Leftrightarrow \ldots\ Z^2 = O_3 \overset{f)}{\Leftrightarrow} Z = O_3$.

Subiectul IV.

a) Deoarece avem $\{x+1\} = \{x\}$, rezultă că $f(x+1) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Pentru $x \in [0,1)$, $f(x) = 3 + x(1-x)$ şi pentru $x \in [1,2)$, $f(x) = 3 + (x-1)(2-x)$, de unde deducem că f este continuă în $x = 1$.

c) Pentru $x \in [0,1)$, $f(x) = 3 + x - x^2$ şi obținem $F(x) = 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, $\forall\, x \in [0,1)$.

d) Evident, folosind faptul că $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $0 \le \{x\} < 1$.

e) Se arată că funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$. În consecință, f are primitive pe $\mathbf{R}$.
Considerăm o primitivă oarecare $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a funcției *f*.
Din **d)** deducem că funcția G e strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

f) Considerăm $x > 0$.

Din **d)** avem că $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $f(t) \ge 3$, deci $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \ge 3x$ şi obținem

$\lim_{x\to\infty} F(x) \ge \lim_{x\to\infty} 3x = +\infty$, adică $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$.

g) Se arată că $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $F(x+1) - F(x) = F(1) - F(0)$
şi $G(x+1) - G(x) = 0 \Leftrightarrow a = F(1) - F(0)$.
Aşadar pentru $a = F(1) - F(0)$, funcția G este periodică pe $\mathbf{R}$, de perioadă 1.