

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta062

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,2\sqrt{3})$, $B(-1,2\sqrt{3})$, $C(0,\sqrt{3})$.

- (4p) a) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) b) Să se determine valorile lui a pentru care punctele $B(-1,2\sqrt{3})$, $C(0,\sqrt{3})$ și $D(a,0)$ sunt coliniare.
- (4p) c) Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.
- (4p) d) Să se determine lungimea înălțimii din B în triunghiul ABC .
- (2p) e) Să se afle distanța de la punctul $O(0,0)$ la dreapta AB .
- (2p) f) Să se determine suma soluțiilor complexe ale ecuației $z^4 = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Dacă ecuația $x^2 - x + 1 = 0$ are rădăcinile complexe x_1, x_2 , să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.
- (3p) b) Să se determine al doilea termen al dezvoltării $(1 + \sqrt{2})^{10}$.
- (3p) c) Să se afle numărul funcțiilor $f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$.
- (3p) d) Să se determine parametrii reali a, b astfel încât polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$ să fie divizibil cu $X - 2$ și împărțit la $X - 1$ să dea restul 4.
- (3p) e) Să se rezolve în \mathbf{R} inecuația $2^x < 3^x$.

2. Se consideră funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1, \infty)$.
- (3p) b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se arate că $0 < f(x) \leq 1$, $\forall x \in [1, \infty)$.

- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră o funcție $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, cu proprietatea

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{Q}.$$

- (4p) a) Să se arate că $f(0) = 0$.
- (4p) b) Să se arate că $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.
- (4p) c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că
 $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{Q}$.
- (2p) d) Să se deducă egalitatea $f(nx) = nf(x)$, $\forall x \in \mathbf{Q}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Notăm $a = f(1)$, $a \in \mathbf{Q}$. Să se arate că $f(x) = a \cdot x$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $f(1) \neq 0$, atunci funcția f este bijectivă.
- (2p) g) Să se demonstreze că dacă $(H, +)$ este subgrup al grupului $(\mathbf{Q}, +)$ și este izomorf cu grupul $(\mathbf{Q}, +)$, atunci $H = \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$ și $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$g(x) = \cos x + x \sin x.$$

- (4p) a) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se verifice că $g'(x) > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (2p) d) Să se arate că $g(x) > 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (2p) e) Utilizând teorema lui Lagrange pentru funcția f , să se demonstreze inegalitatea
 $f(x+1) - f(x) > 1$, $\forall x > 2$.
- (2p) f) Să se arate că $f(n) > n - 2$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n^2}$.

Varianta 62

Subiectul I.

- a) $S_{ABC} = \sqrt{3}$.
- b) $a = 1$.
- c) $AB = AC = BC = 2$, deci triunghiul ABC este echilateral.
- d) $h_B = \sqrt{3}$.
- e) Distanță de la O la AB este de $2\sqrt{3}$.
- f) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

Subiectul II.

1.

- a) $x_1^3 + x_2^3 = -2$.
- b) $10\sqrt{2}$.
- c) Numărul funcțiilor $f : A \rightarrow B$, unde $A = \{1, 2\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$ este egal cu 9.
- d) $\begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$.
- e) $x > 0$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \forall x \geq 1$.
- b) Avem $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$, așadar f este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.
- c) Dreapta $Ox: y = 0$ este asimptota (orizontală) spre $+\infty$ la graficul funcției.
- d) Folosind monotonia și continuitatea funcției f se arată că $\text{Im } f = (0, 1]$.
- e) $\int_1^2 f(x) dx = \ln \frac{5}{2}$.

Subiectul III.

- a) Pentru $x = y = 0$ în relația din enunț, obținem $f(0) = 0$.
- b) Pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, punând $y = -x$ în relația din enunț și folosind a) obținem $f(-x) = -f(x)$.
- c) Se demonstrează prin inducție, folosind proprietatea din ipoteză.
- d) Pentru $n = 0$ și $x \in \mathbb{Q}$ oarecare, avem $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$
- Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{Q}$ oarecare, alegând $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ în (1) obținem $f(nx) = n \cdot f(x)$.

e) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, alegând $x = \frac{1}{n}$ în d) obținem $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}$.

Dacă $x \in \mathbf{Q}$, $x > 0$, atunci există $p, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x = \frac{p}{n}$.

Din d) obținem $f(x) = f\left(p \cdot \frac{1}{n}\right) = a \cdot x$,

Pentru $x \in \mathbf{Q}$, $x < 0$, din b) și a) rezultă că $f(x) = a \cdot x$.

f) Evident, folosind definiția funcției bijective.

g) Considerăm subgrupul $(H, +)$ al grupului $(\mathbf{Q}, +)$, astfel încât există $f : \mathbf{Q} \rightarrow H$ un izomorfism de grupuri. Obținem că există $a \neq 0$, astfel încât $\forall x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = a \cdot x$.

Se arată ușor că $\text{Im } f = \mathbf{Q}$, deci $H = \mathbf{Q}$.

Subiectul IV.

a) $g'(x) = x \cdot \cos x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) $f'(x) = g\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $\forall x \in (0, \infty)$.

c) Evident, folosind punctul a).

d) Din c), rezultă că g este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad g(x) > g(0) = 1.$$

e) Pentru orice $x > 2$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[x, x+1]$ și folosind teorema lui Lagrange deducem că există $c_x \in (x, x+1)$, astfel încât

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f'(c_x) \stackrel{\text{b)}}{=} g\left(\frac{\pi}{c_x}\right) \stackrel{\text{d)}}{>} 1$$

f) Pentru $n \geq 3$, dându-i lui x succesiv valorile $3, 4, \dots, n-1$ în inegalitatea de la punctul e) și adunând relațiile obținute, deducem concluzia.

g) Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, avem $0 < f(n) = n \cdot \cos \frac{\pi}{n} < n$.

Folosind punctul f) deducem:

$$-\frac{1}{n^2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2n^2} < \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n^2} < -\frac{1}{n^2} + \frac{(n-2)(n+3)}{2n^2}$$

și trecând la limită obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n^2} = \frac{1}{2}$.