

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta061

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $2\vec{i} + 5\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului $[AC]$, unde $A(6, 7)$ și $C(7, 6)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(6, 7)$ și $C(7, 6)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(6, 7)$, $B(5, 5)$ și $C(7, 6)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{3+i}{4-i} = a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze elementul $\hat{3}^{2007}$ în \mathbf{Z}_7 .
- (3p) b) Să se calculeze expresia $E = C_9^4 - C_9^5$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 8^x = 10$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n > n^3$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 2x - 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[n]{n} + 5}{2n + 7}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră inelele $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$ și $(\mathbf{Z}_{24}[X], +, \cdot)$. Un element a dintr-un inel $(A, +, \cdot)$ se numește *nilpotent* dacă există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $a^n = 0$.

- (4p) a) Să se arate că $\hat{6}$ este *nilpotent* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$, iar $\hat{2}$ nu este *nilpotent* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$
- (4p) b) Să se arate că $f = \hat{6}X + \hat{12}$ este *nilpotent* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}[X], +, \cdot)$, iar $g = X + \hat{1}$ nu este *nilpotent* în $(\mathbf{Z}_{24}[X], +, \cdot)$
- (4p) c) Să se demonstreze că $\hat{a} \in \mathbf{Z}_{24}$ este *nilpotent* dacă și numai dacă 6 divide a .
- (2p) d) Să se determine numărul elementelor *nilpotente* din inelul $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbf{Z}_{24}$ sunt *nilpotente* atunci $f = \hat{a}X + \hat{b}$ este *nilpotent* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}[X], +, \cdot)$.
- (2p) f) Să se arate că $f \in \mathbf{Z}_{24}[X]$, $f = \hat{a}X^3 + \hat{b}X^2 + \hat{c}X + \hat{d}$ este *nilpotent* dacă și numai dacă $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ sunt *nilpotente* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$.
- (2p) g) Să se determine numărul polinoamelor de gradul 3 din inelul $\mathbf{Z}_{24}[X]$ care sunt *nilpotente*.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = e^{x^2}$ și $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $F'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că funcția F este injectivă.
- (4p) c) Să se arate că $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se demonstreze că $F(x) > \frac{x^3}{3} + x$, $\forall x > 0$ și $F(x) < \frac{x^3}{3} + x$, $\forall x < 0$.
- (2p) e) Să se demonstreze că funcția F este bijectivă.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot G\left(\frac{1}{n}\right)$, unde $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este inversa funcției F .
- (2p) g) Să se arate că nu există $u, v \in \mathbf{R}[X]$, nenule, astfel încât $F(x) = \frac{u(e^{x^2})}{v(e^{x^2})}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 061

Subiectul I

a) $|2\vec{i} + 5\vec{i}| = \sqrt{29}$. b) $AB = \sqrt{2}$. c) $\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

d) $\begin{cases} a=1 \\ b=-13 \end{cases}$. e) $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\Delta| f$, $\begin{cases} a=\frac{11}{17} \\ b=\frac{7}{17} \end{cases}$.

Subiectul II

1.a) In \mathbf{Z}_7 avem $\hat{3}^{2007} = \hat{6}$. b) $E = C_9^4 - C_9^5 = 0$. c) $x = 1, x = -1, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$;

d) $x=1$ este unica solutie a ecuatiei date. e) Probabilitatea ceruta este egala cu $\frac{4}{5}$.

2. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^5 + 2x - 1$

a) $f'(x) = 5x^4 + 2, x \in \mathbf{R}$. b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$. c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$. d) $f'(x) > 0, x \in \mathbf{R}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n} + 5}{2n + 7} = 0$.

Subiectul III

a) In $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$ avem $\hat{6}^3 = \hat{0}$, deci $\hat{6}$ este nilpotent, $\hat{2}$ nu este nilpotent, deoarece nici o putere a lui $\hat{2}$ nu este divizibila cu 3, deci nu este divizibil cu 24.

b) In \mathbf{Z}_{24} avem $\hat{6}^3 = \hat{0}, 1\hat{2}^3 = \hat{0}, \hat{6}^2 \cdot 1\hat{2} = \hat{6}^3 \cdot \hat{2} = \hat{0}, \hat{6} \cdot 1\hat{2}^2 = \hat{6}^3 \cdot \hat{2} = \hat{0}$, deci $f = \hat{6}x + 1\hat{2}$ este nilpotent in \mathbf{Z}_{24} , pt ca $f^3 = \hat{0}$; iar polinomul $g = x + \hat{1}$ nu este nilpotent pentru ca orice putere a lui g va contine cel putin un termen diferit de $\hat{0}$.

c) Daca $6|a \Leftrightarrow a = 6k \Rightarrow \hat{a}^3 = (6\hat{k})^3 = \hat{0}$, deci \hat{a} este nilpotent in \mathbf{Z}_{24} . Daca \hat{a} este nipoent in \mathbf{Z}_{24} , atunci $\exists n \in \mathbf{N}^*$ astfel incat $\hat{a}^n = \hat{0} \Rightarrow \hat{0} \Rightarrow \exists n \in \mathbf{N}$ astfel incat a^n sa fie divizibil cu 24 $\Rightarrow 6|a^n \Rightarrow 6|a$;

d) Conform punctului c) avem $a \in \mathbf{Z}_{24}$ este nilpotent daca si numai daca $6|a$, rezulta ca elementele nipoente din $(\mathbf{Z}_{24}, +)$ sunt $(\hat{0}, \hat{6}, 1\hat{2}, 1\hat{8})$.

e) Daca $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbf{Z}_{24}$ sunt nilpotente, atunci $6|a$ si $6|b$. Pentru $f = \hat{a}x + \hat{b}$ avem $f^3 = ((\hat{a})x + \hat{b})^3$, in fiecare coeficient apar puterile lui \hat{a}, \hat{b} , dar $6|a, 6|b$, deci $f^3 = 0$;

f) $f = \hat{a}x^3 + \hat{b}x^2 + \hat{c}x + \hat{d}$, daca $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ sunt nilpotente, deci divizibile cu 6

$\Rightarrow f = 6 \cdot g, f^3 = 6^3 \cdot g^3 = 0$. Reciproc,

$f^n(x) = \hat{a}^n \cdot x^{3n} + \dots, \hat{a}^n = \hat{0} \Rightarrow \hat{a}$ este nilpotent $\Rightarrow g(x) = f(x) - \hat{a} \cdot x^3$ este nilpotent si procedam la fel pentru g

g) Numarul polinoamelor nilpotente in $\mathbf{Z}_{24}[x]$ care au gradul 3, este $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$, pentru ca $f = \hat{a}x^3 + \hat{b}x^2 + \hat{c}x + d$, $\hat{a} \in \{\hat{6}, 1\hat{2}, 1\hat{8}\}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} \in \{\hat{0}, \hat{6}, 1\hat{2}, 1\hat{8}\}$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) $F'(x) = e^{x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow F$ este strict crescatoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow F$ este injectiva.

c) Inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Fie functia

$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = e^x - x - 1$. Avem $g(0) = 0$ este punct de minim global, deci $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

d) Daca in inegalitatea de la pct c) inlocuim x cu t^2 , obtinem: $e^{t^2} > t^2 + 1$, $\forall t \in \mathbf{R}^*$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{t^2} dt > \frac{1}{3}x^3 + x \Leftrightarrow F(x) > \frac{1}{3}x^3 + x, \forall x > 0$$

Avem $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt$. Facem substitutia $t = -u$ si obtinem $\int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x f(-u)(-du) = -\int_0^x f(u) du = -F(x)$.

Din $F(x) > \frac{1}{3}x^3 + x$, $\forall x > 0$ rezulta $F(x) < \frac{x^3}{3} + x$, $\forall x < 0$

e) Functia F este injectiva (punctul b))

Avem $F(x) > \frac{1}{3}x^3 + x$, $\forall x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$

$F(x) < \frac{1}{3}x^3 + x$, $\forall x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$. Functia F este continua pe \mathbf{R} , deci este surjectiva. Functia F este injectiva si surjectiva, deci F este bijectiva.

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x)}{F(G(x))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{F(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{F'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{f(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{e^{t^2}} = 1.$$

g) Presupunem ca $\exists u, v \in \mathbf{R}[X]$, nenule astfel incat $F(x) = \frac{u(e^{x^2})}{v(e^{x^2})}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Fie

$$e^{x^2} = t \Rightarrow x^2 = \ln t \Rightarrow x = \sqrt{\ln t}, \text{ pentru } t \geq 1$$

$$\Rightarrow F(\sqrt{\ln t}) = \frac{u(t)}{v(t)}, t > 1. \text{ Derivand, obtinem } F'(\sqrt{\ln t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln t}} \cdot \frac{1}{t} = \left(\frac{u(t)}{v(t)} \right)' \Leftrightarrow \frac{e^t}{2t\sqrt{\ln t}} = \frac{P(t)}{Q(t)} \Leftrightarrow \\ 1 = \frac{2t\sqrt{\ln t} \cdot P(t)}{e^t \cdot Q(t)}, \forall x \geq 1$$

Trecând la limita $t \rightarrow 0$, obtinem contradictie $1=0$