

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta059

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$ se consideră punctele $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

- (4p) a) Să se determine lungimea segmentului (AC) .
- (4p) b) Să se determine distanța de la punctul $B(0, 4, 0)$ la planul (xOz) .
- (4p) c) Să se calculeze în mulțimea \mathbf{C} , numărul i^{2007} .
- (4p) d) Să se determine ecuația tangentei în punctul $M(6, -6)$ la parabola de ecuație $y^2 = 6x$.
- (2p) e) Să se arate că punctele $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ și $C(0, 0, 4)$ aparțin planului $x + y + z = 4$.
- (2p) f) Să se rezolve în mulțimea \mathbf{C} ecuația $z^2 - 6z + 25 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5$.
- (3p) b) Să se calculeze $\log_2(\log_3 9)$.
- (3p) c) Să se calculeze $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^7 + 2^8$.
- (3p) d) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Să se rezolve ecuația $f(f(x)) = x$.
- (3p) e) Să se determine numărul funcțiilor surjective $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x > 0$.
- (3p) b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției f .
- (3p) c) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^e (x - 1 - f(x)) dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

Varianta 059

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $O_3, I_3, A \in M_3(\mathbf{Z})$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

și funcția $f_A : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_A(x) = \det(A + xI_3)$.

- (4p) a) Să se calculeze $\det(A)$.
- (4p) b) Pentru $x \in \mathbf{R}$, să se calculeze $f_A(x)$.
- (4p) c) Să se demonstreze că $(A^2 - 2I_3)(A - 2I_3) = O_3$.
- (2p) d) Să se demonstreze că $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (k+n) = n!C_{k+n}^k$.
- (2p) e) Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, produsul a n numere întregi consecutive este divizibil cu $n!$.
- (2p) f) Să se demonstreze că dacă $g \in \mathbf{Z}[X]$ are o rădăcină întreagă, atunci numărul $g(0) \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot \dots \cdot g(n)$ este divizibil cu $(n+1)!$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se demonstreze că numărul $\det(A) \cdot \det(A + I_3) \cdot \det(A + 2I_3) \cdot \dots \cdot \det(A + 2006I_3)$ este divizibil cu $2007!$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$ și $f(x + 2\pi) = f(x)$.
- (4p) b) Să se calculeze $g(x)$ și $g'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se demonstreze că funcția g este periodică.
- (2p) d) Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(2n\pi - x) = -g(x)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^{2\pi} t \cdot f(t) dt$.
- (2p) f) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, să se calculeze $\int_0^{2n\pi} t \cdot f(t) dt$.
- (2p) g) Să se demonstreze că nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t \cdot f(t) dt$.

Varianta 59

Subiectul I.

- a) $AC = 4\sqrt{2}$.
- b) 4.
- c) $i^{2007} = -i$.
- d) Ecuația tangentei este: $x + 2y + 6 = 0$.
- e) $x_A + y_A + z_A = x_B + y_B + z_B = x_C + y_C + z_C = 4$, deci punctele A, B, C aparțin planului din enunț.
- f) $z_{1,2} = 3 \pm 4i$.

Subiectul II.

1.

- a) $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 16$.
- b) $\log_2(\log_3 9) = 1$.
- c) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^8 = 171$.
- d) $x = 3$.
- e) Există 6 funcții surjective ca în enunț.

2.

- a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, pentru $x > 0$.
- b) Există un unic punct de extrem (de minim) al funcției f .
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- d) $f''(x) > 0$, $\forall x > 0$ deci funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
- e) $\int_1^e (x - 1 - f(x)) dx = 1$

Subiectul III.

- a) $\det(A) = -4$.
- b) $f_A(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$.
- c) Se arată prin calcul direct, sau ținând cont de faptul că $f_A(x) = (x+2)(x^2 - 2)$ și $f_A(-A) = 0$.
- d) Calcul direct.
- e) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, considerăm $k \in \mathbf{Z}$ și numerele întregi consecutive $k+1, k+2, \dots, k+n$.

I. $k \geq 0$: Din punctul **d)** avem că $P = (k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (k+n) = n! C_{k+n}^k$ și deoarece $C_{k+n}^k \in \mathbb{N}^*$, rezultă că P este divizibil cu $n!$.

II. $k \in [-n, -1]$: Avem că $P = 0$, aşadar P este divizibil cu $n!$.

III. $k \leq -n-1$: Avem $P = (-1)^n \cdot (-k-1) \cdot (-k-2) \cdot \dots \cdot (-k-n) = (-1)^n \cdot Q$.

Deoarece numerele $-k-n, \dots, -k-2, -k-1$ sunt numere naturale consecutive, din cazul **I.** rezultă că numărul Q este divizibil cu $n!$, deci și numărul P este divizibil cu $n!$.

f) Notăm cu a rădăcina întreagă a polinomului g .

Există polinomul $h \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $g(X) = (X-a) \cdot h(X)$.

$$E = g(0) \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot \dots \cdot g(n) = (-a)(1-a) \cdot \dots \cdot (n-a) \cdot h(0) \cdot h(1) \cdot \dots \cdot h(n)$$

Deoarece $h \in \mathbb{Z}[X]$, avem că $h(0) \cdot h(1) \cdot \dots \cdot h(n) \in \mathbb{Z}$

Pentru că $P = (-a)(1-a) \cdot \dots \cdot (n-a)$ este produsul a $n+1$ numere întregi consecutive, din punctul **e)** rezultă că P este divizibil cu $(n+1)!$.

Deducem că numărul E este divizibil cu $(n+1)!$.

g) $\det(A) \cdot \det(A + I_3) \cdot \det(A + 2I_3) \cdot \dots \cdot \det(A + 2006I_3) = f_A(0) \cdot f_A(1) \cdot \dots \cdot f_A(2006)$.

Deoarece f_A are coeficienți întregi, aplicăm punctul **f)** pentru $n = 2006$ și obținem concluzia.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) Pentru $x \in \mathbb{R}$, avem $g(x) = \arctg(\sin x)$ și $g'(x) = f(x)$.

c) Funcția g este o primitivă a funcției f , pentru care $g(0) = 0$.

Se demonstrează că $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x+2\pi) = g(x)$, aşadar funcția g este periodică, de perioadă 2π .

d) Pentru $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{Z}^*$, avem $f(2n\pi - x) = f(-x) = f(x)$ (1)

Pentru $n = 0$, avem din **a)** $f(-x) = f(x)$, deci (1) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Din (1) obținem că există $g(2n\pi - x) = -g(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Considerăm funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = t \cdot f(t)$.

$$\text{Obținem } I_1 = \int_0^{2\pi} h(t) dt = 0 = \int_0^{2\pi} h(2\pi - t) dt = 0.$$

f) Pentru $k \in \mathbb{N}$, făcând schimbarea de variabilă $t - 2k\pi = y$, și folosind **a)** obținem:

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} t \cdot f(t) dt = \int_0^{2\pi} (y + 2k\pi) \cdot f(y + 2k\pi) dy = \int_0^{2\pi} t \cdot f(t) dt = I_1 = 0.$$

Avem $I_n = \int_0^{2n\pi} t \cdot f(t) dt = \int_0^{2\pi} t \cdot f(t) dt + \int_{2\pi}^{4\pi} t \cdot f(t) dt + \dots + \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} t \cdot f(t) dt = n \cdot I_1 = 0.$

g) Pentru $x > 0$, notăm cu $n = \left[\frac{x}{2\pi} \right] \in \mathbb{N}$ și avem că $x \in [2n\pi, 2(n+1)\pi).$

Atunci, $u(x) = \int_0^x t \cdot f(t) dt = I_n + \int_{2n\pi}^x t \cdot f(t) dt = \int_{2n\pi}^x t \cdot f(t) dt.$

$u\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \int_{2n\pi}^{\frac{2n\pi + \pi}{2}} t \cdot f(t) dt$ și făcând schimbarea de variabilă $t - 2n\pi = y$ obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \infty.$$

Avem însă $u(2n\pi) = \int_{2n\pi}^{2n\pi} t \cdot f(t) dt = 0$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} u(2n\pi) = 0.$

În concluzie, nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t \cdot f(t) dt.$