

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....058***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine conjugatul numărului complex  $z = i^{10} + i^{11}$ .
- (4p) b) Să se determine  $x \in \mathbf{R}$  știind că are loc egalitatea de numere complexe  $(1 + x \cdot i)^2 = 1$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2}$ .
- (4p) d) Să se calculeze  $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{2}$ .
- (2p) e) Să se determine  $c, d \in \mathbf{R}$  știind că punctele  $P(c,1), Q(2,d)$  sunt situate pe dreapta de ecuație  $2x - y - 3 = 0$ .
- (2p) f) Să se dea un exemplu de punct  $M(a,b)$  situat pe parabola de ecuație  $y^2 = 9x$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Știind că  $a = \log_2 24$  și  $b = \log_2 6$ , să se arate că  $a - b$  este un număr natural.
- (3p) b) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{vmatrix}$ .
- (3p) c) Dacă  $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ a & 3 \end{pmatrix}$ , să se determine  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât  $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ .
- (3p) d) Dacă  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , să se calculeze  $(f \circ f)(1)$ .
- (3p) e) Să se dea un exemplu de mulțime care are exact 4 submulțimi.

**2.**

- (3p) a) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ .
- (3p) b) Dacă  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x$ , să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = -x^4$  este concavă pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = (x - 2)^2$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ , unde  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ , notăm

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ și } O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se arate că există  $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ , astfel ca  $A = xE + yI + zJ + tK$ .
- (4p) b) Să se arate că  $\det(A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .
- (4p) c) Să se arate că, dacă  $\det(A) = 0$ , atunci  $A = O_2$ .
- (2p) d) Să se arate că  $I^2 = J^2 = K^2 = -E$ ,  $I \cdot J = -J \cdot I = K$ ,  $J \cdot K = -K \cdot J = I$ ,  $K \cdot I = -I \cdot K = J$ .
- (2p) e) Să se arate că, dacă  $A \neq O_2$ , atunci  $A$  este inversabilă și să se determine  $A^{-1}$ .
- (2p) f) Dacă  $A' = \begin{pmatrix} a'+ib' & c'+id' \\ -c'+id' & a'-ib' \end{pmatrix}$  să se arate că  

$$A \cdot A' = (aa' - bb' - cc' - dd')E + (ab' + ba' + cd' - dc')I +$$

$$+ (ac' - bd' + ca' + db')J + (ad' + bc' - cb' + da')K$$
- (2p) g) Știind că  $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$ ,  $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$ , să se deducă relația  

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = (aa' - bb' - cc' - dd')^2 +$$

$$+ (ab' + ba' + cd' - dc')^2 + (ac' - bd' + ca' + db')^2 + (ad' + bc' - cb' + da')^2.$$

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f_a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_a(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ , unde  $a \in \mathbf{R}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x)$ .
- (4p) b) Să se demonstreze că  $f_a$  este continuă pe  $\mathbf{R}$  dacă și numai dacă  $a = 1$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $f'_a(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}^*$ .
- (2p) d) Să se demonstreze că  $f_a$  este derivabilă pe  $\mathbf{R}$  dacă și numai dacă  $a = 1$ .
- (2p) e) Să se demonstreze inegalitatea  $\frac{2}{\pi} \leq f_a(x) < 1$ , pentru orice  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  și  $a \in \mathbf{R}$ .
- (2p) f) Să se demonstreze inegalitatea  $1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx < 1 + \cos 1$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t} dt$ .

### Varianta 58

#### Subiectul I

- a)  $\bar{z} = -1 + i$ . b)  $x = 0$  c)  $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . d)  $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; e)  $c = 2, d = 1$   
f)  $M(1,3)$

#### Subiectul II

1. a)  $a - b = 2 \in \mathbf{N}$  b)  $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{vmatrix} = 0$ . c)  $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } B$ ; dacă  $\det B = 0 \Leftrightarrow a = 1$ . d)  $(f \circ f)(1) = \frac{5}{2}$ . e) Multimea  $A = \{1, 2\}$

2. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$ . b)  $f'(x) = 3x^2 + 1$ . c)  $f''(x) = -12x^2 \leq 0$ .

- d)  $f$  are un punct de extrem local ( $x=2$  punct de minim). e)  $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln 3$ .

#### Subiectul III

- a)  $A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}$ . Avem  $x=a, y=b, z=c, t=d$ .

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} = (a^2 + b^2) + (c+id)(c-id) = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

c) Dacă  $\det A = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbf{R} \Rightarrow a = b = c = d = 0 \Rightarrow A = O_2$

d) Calcul direct

e) Dacă  $A \neq O_2$ , având în vedere că  $\det A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$ , rezultă că  $\det A \neq 0$ , deci matricea A este inversabilă.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a-ib & -(c+id) \\ -(-c+id) & a+ib \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a-ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{pmatrix};$$

$$f) \left. \begin{array}{l} A = aE + bI + cJ + dK \\ A' = a'E + b'I + c'J + d'K \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot A' = (aE + bI + cJ + dK)(a'E + b'I + c'J + d'K) =$$

$$= aa'E^2 + ab'EI + ac'EJ + ad'EK + ba'I E + bb'I^2 + bc'IJ + bd'JK + ca'IE + cc'J^2 + cb'JI + cd'JK + da'KE + db'KI + dc'KJ + dd'K^2 = aa'E + ab'I + ac'J + ad'K + ba'I - bb'E + bc'K -$$

$$-bd'J + ca'J - cc'E - cb'K + cd'I + da'K + db'J - dc'I - dd'E = (aa' - bb' - cc' - dd')E + \\ + (ab' + ba' + cd' - dc')I + (ac' - bd' + ca' + db')J + (ad' + bc' - cb' + da')K;$$

g)  $\det(A \cdot A^{'}) = \det A \cdot \det A^{'} \quad (1)$

$$\det A \cdot \det A^{'} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot (a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \quad (2)$$

Din a) și f) avem

$$A \cdot A^{'} =$$

$$\begin{pmatrix} aa' - bb' - cc' - dd' + i(ab' + ba' + cd' - dc') & ac' - bd' + ca' + db' + i(ad' + bc' - cb' + da') \\ -(ac' - bd' + ca' + db') + i(ad' + bc' - cb' + da') & aa' - bb' - cc' - dd' - i(ab' + ba' + cd' - dc') \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot A^{'}) = (aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2 + \\ + (ac' - bd' + ca' + db')^2 + (ad' + bc' - cb' + da')^2 \quad (3).$$

Din (1), (2), (3) rezultă relația cerută.

#### Subiectul IV

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  și  $|\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbf{R}$ , deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$ .

b)  $f_a$  este continuă pe  $\mathbf{R}^*$ .  $f_a$  este continuă în  $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = f_a(0)$ . Avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, f_a(0) = a. \text{ Deci } f_a \text{ este continuă în } x_0 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

c) Dacă  $x \in \mathbf{R}^*$ , atunci  $f_a'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, x \in \mathbf{R}^*$ .

d) Funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbf{R}^*$ . Pentru ca  $f$  să fie derivabilă în  $x_0 = 0$  este necesar ca  $f$  să fie continuă în  $x_0 = 0$ , deci  $a = 1$ . Demonstrăm că în acest caz  $f$  este derivabilă în  $x_0 = 0$ . Funcția  $f$  este derivabilă în  $x_0 = 0$  dacă există  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \in \mathbf{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2x} = 0 \in \mathbf{R}.$$

e)  $f_a'(x) = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Dar  $\operatorname{tg} x > x, \forall x \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$ , deci  $f_a'(x) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_a$  este descrescătoare  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_a'(x) \geq f_a(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 1 \geq f_a(x) > \frac{2}{\pi}$ .

f) Din e) avem  $\frac{2}{\pi} \leq f_1(x), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx \Leftrightarrow 1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx$

Pe de altă parte  $\forall x \in (0, 1], f_1(x) < 1 \Rightarrow \int_0^1 f_1(x) dx < \int_0^1 1 dx = 1$  și  $\forall x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$\frac{\sin x}{x} \leq \sin x \Rightarrow \int_1^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos 1, \text{ aşadar}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx = \int_0^1 f_1(x) dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx < 1 + \cos 1.$$

g) Vom calcula limita la dreapta în zero.

Din e) obținem că  $f_1'(x) < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , deci  $f_1$  este strict descrescătoare pe

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Așadar pentru  $t \in [x, 2x] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , avem  $f_1(2x) \leq f_1(t) \leq f_1(x)$  și

$$\frac{f_1(2x)}{t} \leq \frac{f_1(t)}{t} \leq \frac{f_1(x)}{t}, \text{de unde } f_1(2x) \cdot \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t} dt \leq f_1(x) \cdot \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t} dt \leq \frac{\sin x}{x} \cdot \ln 2 \text{ și trecând la limită obținem } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t} dt = \ln 2.$$

Analog deducem că  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t} dt = \ln 2$ , deci  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t} dt = \ln 2$ .