

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....057***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $z = \frac{3}{5} + i \cdot \frac{4}{5}$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $O(0,0)$  la punctul  $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ .
- (4p) c) Să se arate că punctul  $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  este situat pe cercul de ecuație  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (4p) d) Să se determine ecuația tangentei în punctul  $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  la cercul de ecuație  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(1, 0, 2)$ ,  $C(2, 1, 0)$  și  $O(0, 0, 0)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $P(2, 3)$  și  $Q(3, 2)$  să fie situate pe dreapta  $x + ay + b = 0$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se rezolve ecuația  $\hat{x}^3 = \hat{x}$ ,  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_4$ .
- (3p) b) Să se determine  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , astfel încât  $C_n^2 = 2n$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^7 + 1$  are inversă  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , să se calculeze  $g(1)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x^2 + 7) = \log_2(2x^2 + 3x + 7)$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului  $f = 3X^3 - 6X^2 + 24X + 1$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 9) - \ln(x^2 + 4)$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f'(x) dx$ .

- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $(-\infty, 0]$  și strict descrescătoare pe intervalul  $[0, \infty)$ .

- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

- (3p) e) Să se arate că  $0 < f(x) \leq \ln \frac{9}{4}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{C})$  se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

precum și submulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbf{C} \right\}$ , unde prin  $\bar{z}$  am notat conjugatul numărului complex  $z$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $I_2 \in G$  și  $O_2 \in G$ .
- (4p) b) Să se demonstreze că dacă  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , atunci  $z \cdot \bar{z}$  este un număr real.
- (4p) c) Să se arate că determinantul  $\begin{vmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{vmatrix}$  este un număr real.
- (2p) d) Să se găsească o matrice  $X \in G$ , cu proprietatea că  $X \cdot J \neq J \cdot X$ , unde  $J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ .
- (2p) e) Să se arate că dacă  $A \in G$  și  $A \neq O_2$ , atunci  $A$  este matrice inversabilă și  $A^{-1} \in G$ .
- (2p) f) Să se arate că ecuația  $X^2 = -I_2$  are o infinitate de soluții în mulțimea  $G$ .
- (2p) g) Să se dea un exemplu de corp necomutativ.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln(1+x) - x$  și sirul  $(I_n)_{n \geq 1}$ , cu termenul general  $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n} dx$ ,  $\forall n \geq 1$ , unde  $a$  este o constantă reală strict pozitivă.

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x > -1$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f(0)$  și  $f'(0)$ .
- (4p) c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- (2p) d) Să se deducă inegalitatea  $\ln(1+x) \leq x$ ,  $\forall x > -1$ .
- (2p) e) Să se demonstreze că  $\frac{x}{a+x} \leq \frac{x}{a}$ ,  $\forall x \geq 0$  și apoi să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n}$ .
- (2p) f) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că
$$I_n = \ln \frac{a+1}{a} - \int_0^1 \ln \left( 1 + \frac{x^n}{a} \right) dx, \quad \forall n \geq 1.$$
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

### Varianta 057

**Subiectul I**

- a)  $|z| = 1$ .
- b)  $OA = 1$ .
- c) Deoarece  $x_A^2 + y_A^2 = 1$ , punctul  $A$  aparține cercului de ecuație  $x^2 + y^2 = 1$ .
- d) Ecuația tangentei este  $3x + 4y - 5 = 0$ .
- e)  $V_{ABCO} = 1$ .
- f)  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$ .

**Subiectul II**

**1.**

- a) Soluția este  $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}\}$ .
- b)  $n = 5$ .
- c)  $g(1) = 0$ .
- d)  $x \in \{-3, 0\}$ .
- e)  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ .

**2.**

- a)  $f'(x) = -\frac{10x}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f'(x) dx = \ln \frac{8}{9}$ .
- c) Evident.
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{5}$ .
- e) Se face tabelul de variație al funcției  $f$  și rezultă concluzia.

**Subiectul III**

- a) Evident
- b) Se arată prin calcul direct.
- c)  $\begin{vmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{vmatrix} = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2 \in [0, \infty)$ .
- d) De exemplu, pentru matricea  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , avem  $XJ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$  și

$$JX = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \text{ deci } XJ \neq JX.$$

e) Considerăm  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G$ ,  $A \neq O_2$ .

Se demonstrează prin reducere la absurd că  $A$  este inversabilă.

Mai mult,  $A^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \in G$ , pentru  $z = \frac{\bar{\alpha}}{d} \in \mathbf{C}$  și  $w = -\frac{\beta}{d} \in \mathbf{C}$ .

f) Pentru orice  $t \in \mathbf{R}$ , avem  $A_t = i \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cdot \cos t & i \cdot \sin t \\ -i \cdot \sin t & i \cdot \cos t \end{pmatrix} \in G$

și  $A_t^2 = i^2 \cdot I_2 = -I_2$ , aşadar ecuația  $X^2 = -I_2$  are o infinitate de soluții în  $G$ .

g) Se arată ușor că  $(G, +, \cdot)$  este un corp necomutativ.

#### Subiectul IV

a)  $f'(x) = -\frac{x}{x+1}$ ,  $\forall x > -1$ .

b)  $f(0) = 0$  și  $f'(0) = 0$ .

c)  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ , aşadar  $f$  este strict crescătoare pe  $(-1, 0]$  și strict descrescătoare pe  $[0, \infty)$ .

d) Din c) deducem că  $x=0$  este punct de maxim global pentru  $f$ , deci  $\forall x > -1$ ,  $f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \forall x > -1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ .

e) Pentru  $x \geq 0$ , avem  $a+x \geq a > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a+x} \leq \frac{x}{a}$ .

Obținem:  $0 < \frac{I_n}{n} = \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{a} dx = \frac{1}{a(n+1)}$  și trecând la limită și aplicând

criteriul cleștelui, rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n} = 0$ .

f) Se arată prin calcul direct.

g) Avem  $0 < \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right) dx \stackrel{\text{d)}{<} \int_0^1 \frac{x^n}{a} dx = \frac{1}{a(n+1)}$ , și trecând la limită și aplicând

criteriul cleștelui, obținem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right) dx = 0$ .

Mai mult, din f) deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \ln \frac{a+1}{a}$ .