

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta056

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul de coordonate Oxy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,-1)$, $C(2,0)$.

- (4p) a) Să se determine lungimea segmentului BC .
- (4p) b) Să se determine aria triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se calculeze $\cos(\hat{A})$.
- (2p) e) Să se determine panta dreptei AB .
- (2p) f) Să se arate că punctele A, B, C aparțin cercului de ecuație $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 - 10 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (1+x)^9$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(-1)$.
- (3p) b) Să se calculeze suma $C_9^0 - C_9^1 + C_9^2 - \dots - C_9^9$.
- (3p) c) Să se determine numărul de termeni iraționali din dezvoltarea binomului $f(\sqrt{2})$.
- (3p) d) Să se determine al treilea termen al dezvoltării binomului $f(\sqrt{2})$.
- (3p) e) Să se calculeze $\hat{5}^7$ în \mathbf{Z}_7 .

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se verifice că $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \frac{2}{5}}{x - 2}$.
- (3p) d) Dacă F este primitiva lui f care verifică relația $F(0) = 1$, să se calculeze $F(1)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $A^2 = a \cdot A$.
- (4p) c) Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $A^n = a^{n-1}A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se arate că există o matrice coloană $C \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ și o matrice linie $L \in M_{1,3}(\mathbf{R})$, astfel ca $A = C \cdot L$.
- (2p) e) Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă și să se determine $b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $(I_3 + A)^{-1} = bI_3 + cA$.
- (2p) f) Să se arate că pentru $x, y \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ avem: $(xI_3 + yJ)^n = x^n I_3 + \frac{1}{3}((x+3y)^n - x^n)J$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $x \neq 0$ și $x+3y \neq 0$ atunci matricea $xI_3 + yJ$ este inversabilă și să se determine inversa acesteia.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pentru $\alpha > 0$ și sirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$

definite prin relațiile $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$, $b_n = \int_1^n f(x) dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este descrescătoare.
- (4p) c) Să se demonstreze că $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se demonstreze inegalitățile $a_n - 1 \leq b_n \leq a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.
- (2p) e) Pentru $\alpha > 1$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (2p) f) Să se arate că $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent pentru $\alpha > 1$ și divergent pentru $\alpha \leq 1$.
- (2p) g) Să se arate că sirul $(a_n - b_n)_{n \geq 1}$ este convergent, $\forall \alpha > 0$.

Varianta 056

Subiectul I:

a) $BC = \sqrt{2}$. b) $S_{ABC} = 2$. c) $G\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. d) $\cos \hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. e) $m_{AB} = -1$. f) $A, B, C \in I$.

Subiectul II:

1. a) $f(-1) = (1-1)^9 = 0$. b) $C_9^0 - C_9^1 + C_9^2 - \dots - C_9^9 = f(-1) = 0$,
 c) $f(\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^9$. $T_{k+1} = C_9^k \cdot \sqrt{2}^k \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow k \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Deci numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $f(\sqrt{2})$ este 5 iar numărul termenilor iraționali este 5.

d) $T_3 = C_9^2 \cdot \sqrt{2}^2 = \frac{9!}{2!7!} \cdot 2 = 36 \cdot 2 = 72$. e) În \mathbf{Z}_7 avem $\hat{5}^7 = \hat{5}$.

2. a) $f(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$. b) $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x), \forall x \in \mathbf{R}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \frac{2}{5}}{x - 2} = -\frac{3}{25}$ d) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$. avem $F(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$.

deci $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$. e) $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$, deoarece f este funcție

impară, iar $[-2, 2]$ este simetric față de origine.

Subiectul III:

a) $\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Deoarece liniile sunt două câte două proporționale, toti

determinantii de ordinul doi sunt nuli. Deci rang $A=1$.

b) $A^2 = 14 \cdot A \Rightarrow a=14$

c) Avem $A^2 = 14 \cdot A \Rightarrow A^3 = 14 \cdot A \cdot A = 14 \cdot A^2 = 14^2 \cdot A$

Fie $p(n)$: $A^n = 14^{n-1} \cdot A$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Prin inducție, $A^n = 14^{n-1} \cdot A$, $n \geq 1$

d) Fie $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ și $L = (1 \ 2 \ 3) \in M_{1,3}(\mathbf{R}) \Rightarrow C \cdot L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = A$

e) $I_3 + A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(I_3 + A) = 15 \Rightarrow$ matricea $I_3 + A$ este inversabilă, $(I_3 + A)^{-1} = \frac{1}{\det(I_3 + A)} \cdot (I_3 + A)^*$

$= \frac{1}{15} \cdot (I_3 + A)^*$. Pe de altă parte $(I_3 + A)^{-1} \cdot (I_3 + A) = I_3$. Deci din

$$(I_3+A)^{-1} = bI_3 + cA \text{ prin inmultire la dreapta în } I_3+A \text{ obtinem relația: } I_3 = (bI_3 + cA)(I_3 + A) \Leftrightarrow I_3 = bI_3 + bA + cA + cA^2 \Leftrightarrow A^2 = 14 \cdot A \Leftrightarrow I_3 = bI_3 + bA + cA + 14cA \Leftrightarrow I_3 = bI_3 + (b+15c)A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -\frac{1}{15}. \end{cases}$$

f) Având în vedere faptul că $(xI_3) \cdot (yJ) = (yJ) \cdot (xI_3)$ putem folosi pentru a calcula $(xI_3 + yJ)^n$ formula lui Newton:

$$\Rightarrow (xI_3 + yJ)^n = C_n^0 x^n I_3 + C_n^1 x^{n-1} y J + C_n^2 x^{n-2} y^2 J^2 + \dots + C_n^n y^n J^n =$$

$$= x^n I_3 + \frac{1}{3} (C_n^1 x^{n-1} 3y + C_n^2 x^{n-2} 3^2 y^2 + \dots + C_n^n 3^n y^n) J =$$

$$= x^n I_3 + \frac{1}{3} [(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} 3y + C_n^2 x^{n-2} 3^2 y^2 + \dots + C_n^n 3^n y^n) - x^n] \cdot J =$$

$$= x^n I_3 + \frac{1}{3} [(x + 3y) - x^n] \cdot J \text{ (am folosit relația } J^n = 3^{n-1} J \text{)}$$

g) cautăm inversa de forma

$$(xI_3 + yJ)^{-1} = x'I_3 + y'J. \text{ Din } (xI_3 + yJ) \cdot (x'I_3 + y'J) = I_3 \text{ rezultă sistemul } x \cdot x' = 1, x \cdot y' + x' \cdot y = 0 \text{ care}$$

pentru $x \neq 0$ și $x + 3y \neq 0$ are soluția $x' = \frac{1}{x}$ și $y' = \frac{-y}{x(x + 3y)}$

Subiectul IV:

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător

b) $f: [1, +\infty] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$, este derivabilă. $f'(x) = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} = -\alpha \cdot \frac{1}{x^{\alpha+1}} < 0 \Rightarrow f$

este strict descrescătoare

c) Funcția f fiind descrescătoare, pentru $\forall x \in [k, k+1]$ avem $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. f este continuă, deci integrabilă, rezultă: $\int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), \forall k \in \mathbb{N}^*$$

d) Adunând inegalitățile de la punctul c) pentru $k=2, \dots, n-1$ rezultă:

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^n f(x) dx \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(n-1)^\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1} \leq b_n \leq a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

e) Pt $\alpha > 1$ $b_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot x^{1-\alpha} \Big|_1^n = \frac{1}{(1-\alpha) \cdot n^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$.

$$\Rightarrow \text{Pentru } \alpha > 1, \lim_{x \rightarrow \infty} b_n = 0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

f) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \in (0, +\infty)$ $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ strict crescător.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Dacă $\alpha > 1$ rezultă

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \Rightarrow a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*. Avem a_n > 0,$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci pentru $\alpha > 1$, sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescator si marginit deci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent. Dacă $\alpha \leq 1$, rezultă

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1). \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty, \text{ deci}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este divergent.

$$\text{(avem } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k \rightarrow 1, 2, \dots, n \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \\ < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$$

g) Fie $x_n = a_n - b_n$, atunci $x_{n+1} - x_n = a_{n+1} - a_n - b_{n+1} + b_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0$, deci sirul

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător și mărginit, în concluzie este convergent.