EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….055

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocaţională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se verifice că punctul $M(1,0,1)$ aparţine planului $x+y+z=2$.

(4p) **b)** Dacă în triunghiul ascuţitunghic ABC avem $\sin A=\frac{1}{2}$, să se determine $m(\hat{B})+m(\hat{C})$.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$, unde $A(4,0)$ şi $B(0,2)$.

(4p) **d)** Să se determine numărul punctelor de intersecţie dintre cercul de ecuaţie $x^2+y^2=4$ şi hiperbola de ecuaţie $x^2-y^2=1$.

(2p) **e)** Să se determine numărul soluţiilor din intervalul $[0,3\pi]$ ale ecuaţiei $\sin x=1$.

(2p) **f)** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât numărul complex $z=a+(1-a)\cdot i$ să aibă modulul 1.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $1+3+5+...+49$.

(3p) **b)** Să se calculeze $1+C_3^2+C_4^2+C_5^2$.

(3p) **c)** Să se determine soluţiile din mulţimea $\mathbf{N}^*$ ale inecuaţiei $2^x<2^{\frac{4}{x}}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în intervalul $(0,\infty)$ ecuaţia $\log_2 x=2$.

(3p) **e)** Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ este injectivă.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x>-1$.

(3p) **b)** Să se determine punctele de minim local ale funcţiei *f*.

(3p) **c)** Să se determine numărul asimptotelor verticale la graficul funcţiei *f*.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_5)$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$

și mulțimea $M = \left\{ A(\hat{a}) = \hat{a} \cdot I_2 + B \mid \hat{a} \in \mathbf{Z}_5 \right\}$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $B^4 = I_2$.

(4p) **b)** Să se determine toate elementele $\hat{a} \in \mathbf{Z}_5$ astfel încât $\det(A(\hat{a})) = \hat{0}$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $\forall\, \hat{x} \in \mathbf{Z}_5$, $\hat{x}^5 = \hat{x}$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, atunci $\widehat{C_5^k} = \hat{0}$ în $\mathbf{Z}_5$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\forall\, \hat{a} \in \mathbf{Z}_5$, $(A(\hat{a}))^5 = A(\hat{a})$.

(2p) **f)** Să se determine numărul soluțiilor din mulțimea M ale ecuației $X^{2007} = X^3$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că ecuația $X^5 - X = I_2$ nu are soluții de forma $X = \begin{pmatrix} x & 2007 \\ 2007 & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ și șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, cu $x_n = F\left(\frac{1}{1}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots + F\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$. Se admite cunoscut faptul că șirul $(c_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ cu $c_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \in \mathbf{N}^*$, este convergent.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $F'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Aplicând teorema lui *Lagrange* funcției F pe intervalul $[0, x]$, să se demonstreze că $\forall\, x > 0$, $\exists\, d_x \in (0, x)$ astfel încât $F(x) = x \cdot f(d_x)$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că funcția F este bijectivă.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

(2p) **g)** Să se arate că $\forall\, \alpha > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n^\alpha} = 0$.

Varianta 55

Subiectul I.

a) Punctul M aparține planului din enunț.

b) $m(\hat{B})+m(\hat{C})=150^\circ$.

c) $M(2,1)$.

d) Există 4 puncte de intersecție.

e) Două soluții.

f) $a\in\{0,1\}$

Subiectul II.

1.

a) $1+3+5+...+49=625$.

b) $1+C_3^2+C_4^2+C_5^2=20$.

c) $x=1$.

d) $x=4$.

e) Se folosește definiția funcției injective.

2.

a) $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, pentru $x>-1$.

b) $x=0$ este punctul de minim local (și global) al funcției f.

c) $d: x=-1$ este singura asimptotă verticală (la dreapta) a funcției.

d) $\int_0^2 f(x)\,dx==\ln 3$.

e) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Subiectul III.

a) $B^2=\hat{4}\cdot I_2 \Rightarrow B^4=I_2$.

b) $\det(A(\hat{a}))=\hat{0} \Leftrightarrow \hat{a}\in\{\hat{2},\hat{3}\}$.

c) Evident.

d) Evident.

e) Pentru $\hat{a}\in\mathbf{Z}_5$, avem $(A(\hat{a}))^5=(\hat{a}\cdot I_2+B)^5$ și deoarece matricele I_2 și B comută, folosind punctul **d)**, avem:

$$(A(\hat{a}))^5=\hat{a}^5\cdot I_2+B^5\overset{\text{c)}}{=}\hat{a}\cdot I_2+B^4\cdot B\overset{\text{a)}}{=}\hat{a}\cdot I_2+B=A(\hat{a}).$$

f) Dacă $X\in M$, din punctul **e)**, avem că $X^5=X$ și prin inducție se deduce că

pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $X^{5^k} = X$.
Obținem că toate cele 5 elemente ale mulțimii M sunt soluții ale ecuației.

g) Presupunem că există $X = \begin{pmatrix} x & 2007 \\ 2007 & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$, astfel încât $X^5 - X = I_2$.

Matricea $A(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{x} \end{pmatrix}$ este o soluție a ecuației $X^5 - X = I_2$ în mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_5)$.

$A^5(\hat{x}) - A(\hat{x}) = I_2 \overset{\text{e)}}{\Leftrightarrow} A(\hat{x}) - A(\hat{x}) = I_2 \Leftrightarrow 0_2 = I_2$ în mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_5)$, fals.

Subiectul IV.

a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = f(x) > 0$.

b) Pentru orice $x > 0$, F este o funcție Rolle pe intervalul $[0, x]$.
Aplicând teorema lui Lagrange funcției F pe intervalul $[0, x]$, deducem că există $c_x \in (0, x)$ astfel încât $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c_x) \overset{F(0)=0}{\Leftrightarrow} F(x) = x \cdot f(c_x)$.

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{F(x)}{x} = 1$.

d) Pentru $x > 0$, avem $F(x) = x \cdot f(c_x) \geq x \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = +\infty$

Pentru $x < 0$, din teorema lui Lagrange rezultă că există $d_x \in (x, 0)$ astfel încât

$F(x) = x \cdot f(d_x) \overset{x<0}{\leq} x \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

e) Din punctul **a)**, deoarece $\forall x \in \mathbf{R}$, $F'(x) > 0$, rezultă că F este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, deci F este injectivă.
Din punctul **d)** rezultă că $Im\, F = \mathbf{R}$, deci F este surjectivă.
În concluzie, funcția F este bijectivă.

f) Pentru $x > 0$, avem $F(x) \geq x$, deci

$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\dfrac{1}{k}\right) \geq 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n + \ln n$, $\forall n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow x_n \geq c_n + \ln n$ şi trecând la limită în relația anterioară, obținem că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

g) Pentru $x > 0$, avem $F(x) = x \cdot f(c_x) \in [x, e \cdot x]$.

$\forall \alpha > 0$, $0 < \dfrac{x_n}{n^\alpha} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\dfrac{1}{k}\right)}{n^\alpha} \leq \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} e \cdot \dfrac{1}{k}}{n^\alpha} = \dfrac{e \cdot (c_n + \ln n)}{n^\alpha} = e \cdot \dfrac{c_n}{n^\alpha} + \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$, de unde deducem concluzia.