EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta **….054**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocaţională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\cos 1 + i\sin 1$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanţa de la punctul $D(1,2)$ la punctul $C(0,1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecţie dintre cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 25$ şi dreapta de ecuaţie $x + y = 0$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(5, 2)$, $M(6, 3)$ şi $N(7, 4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(4, 3, 2)$, $B(3, 2, 4)$, $C(2, 4, 3)$ şi $D(1,2,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se verifice identitatea $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz\right)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se arate că, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$, unde $x, y, z \in \mathbf{R}$, atunci $x = y = z$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z_6}$ să verifice relaţia $\hat{x}^3 = \hat{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^4 + X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x\sin x^2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[0,1]$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_3(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ funcția $f:M_3(\mathbf{C})\to M_3(\mathbf{C})$, $f(X)=X^{2007}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze A^2 și A^3.

(4p) **c)** Să se verifice că matricea I_3+A este inversabilă și că inversa sa este I_3-A+A^2.

(2p) **d)** Să se arate că , dacă $Y\in M_3(\mathbf{C})$ și $Y\cdot A=A\cdot Y$, atunci există $a,b,c\in\mathbf{C}$,

astfel încât $Y=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $Z=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$ unde $a,b,c\in\mathbf{C}$ și $det(Z)=0$,

atunci $Z^3=O_3$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că funcția f **nu** este injectivă.

(2p) **g)** Să se demonstreze că funcția f **nu** este surjectivă.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3+x}{x^2+1}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(x)=2x-\dfrac{x}{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **f)** Să se arate că funcția f este bijectivă .

(2p) **g)** Dacă notăm cu $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ inversa funcției f , să se calculeze $\int_0^{\frac{3}{2}} g(x)dx$.

Varianta 54

Subiectul I.

a) $\left|\cos 1 + i \cdot \sin 1\right| = 1$.

b) $CD = \sqrt{2}$.

c) Se obțin punctele $A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ şi $B\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD} = \frac{3}{2}$.

f) $a = -8$ şi $b = 8\sqrt{3}$.

Subiectul II.

1.

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Se foloseşte punctul **a)**.

c) $x = 0$.

d) Probabilitatea căutată este $p = 1$.

e) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$.

2.

a) $f'(x) = \sin x^2 + 2x^2 \cdot \cos x^2, \ \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1 - \cos 1}{2}$.

c) $f'(x) \geq 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0,1]$.

d) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

e) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

Subiectul III.

a) $\det(A) = 0$ şi $\operatorname{rang}(A) = 2$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = O_3$.

c) Deoarece matricele I_3 şi A comută, avem:

$(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3 + A^3 \overset{b)}{=} I_3$ şi analog $(I_3 - A + A^2)(I_3 + A) = I_3$, aşadar matricea $I_3 + A$ este inversabilă, inversa sa fiind $I_3 - A + A^2$.

d) Se arată prin calcul direct.

e) Deoarece $\det(Z) = a^3 = 0$, rezultă $a = 0$ şi obţinem $Z^3 = O_3$.

f) Pentru $U = A$, $V = O_3$, avem $U \neq V$ şi $f(U) = f(V)$, aşadar funcţia f nu este injectivă.

g) Presupunem că există $X \in M_3(\mathbf{C})$ astfel încât $f(X) = A$.

Deoarece $XA = AX$, din **d)** şi **e)** deducem că $X^3 = O_3$, deci

$X^{2007} = (X^3)^{669} = O_3 \neq A$, contradicţie.

Subiectul IV.

a) Se arată prin calcul direct.

b) $f'(x) = \dfrac{2x^4 + 5x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2 - \ln 2}{2}$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - 2x) = 0$, deci dreapta $d : y = 2x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei.

f) Din **c)** ştim că f este strict crescătoare, deci este injectivă pe $\mathbf{R}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ şi f este continuă pe $\mathbf{R}$ obţinem că

$\operatorname{Im} f = \mathbf{R}$, aşadar f este surjectivă. În concluzie, f este bijectivă.

g) Facem schimbarea de variabilă $f^{-1}(x) = y$ şi

obţinem $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} g(x)\,dx = \frac{1 + \ln 2}{2}$.