

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta053

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine aria unui triunghi cu vârfurile în punctele $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(5, 3)$.
- (4p) b) Să se calculeze aria unui pătrat cu diagonala $\sqrt{2}$.
- (4p) c) Să se determine partea reală a numărului complex $z = \frac{1}{3-4i}$.
- (4p) d) Să se calculeze $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$.
- (2p) e) Să se determine ecuația tangentei la cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 25$ în punctul $A(3, 4)$.
- (2p) f) Să se determine distanța de la punctul $M(1, 2, 3)$ la planul de ecuație $x + y + z = 7$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $\left\{ \frac{1}{2} \right\} + \left\{ \frac{2}{2} \right\} + \left\{ \frac{3}{2} \right\}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .
- (3p) b) Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care $2^n < 2007$.
- (3p) c) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
Să se calculeze $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(10)$.
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^3 + 3X + 1$ la polinomul $g = X - 1$.
- (3p) e) Să se determine probabilitatea ca un element din \mathbf{Z}_9 să fie inversabil față de înmulțire.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2007} + 1$

- (3p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \cdot f'(x)}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2, X^k = O_2 \}$.

- (4p) a) Să se arate că $A \in M$.
- (4p) b) Să se arate că pentru orice matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, avem $B^2 - (a+d)B + (ad-bc)I_2 = O_2$.
- (4p) c) Să se verifice că $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{C})$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $X \in M$, atunci $X^2 = O_2$.
- (2p) e) Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ecuația $Z^n = A$ nu are soluție în $M_2(\mathbb{C})$.
- (2p) f) Să se arate că funcția $f : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $f(X) = X^{2007}$ nu este surjectivă.
- (2p) g) Să se arate că dacă $B \in M$, atunci $\det(I_2 + B + B^2 + \dots + B^{2007}) = 1$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \tan x - x$ și sirurile cu termenul general $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definite prin

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \tan \frac{1}{n+1} + \tan \frac{1}{n+2} + \dots + \tan \frac{1}{n+n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in (0, 1)$.
- (4p) b) Să se arate că funcția g este strict crescătoare pe intervalul $(0, 1)$.
- (4p) c) Să se arate că $\tan \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \leq \tan \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k} \leq \tan \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$, $k = \{1, 2, \dots, n\}$.
- (2p) d) Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}^*$, să se arate că $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$.
- (2p) e) Să se arate că sirul $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este monoton și mărginit.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln 2$.

Varianta 053

Subiectul I

- a) Aria triunghiului ABC este $S = \frac{7}{2}$.
- b) Aria pătratului este $S = 1$.
- c) $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{25}$.
- d) $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$.
- e) Ecuația căutată este: $3x + 4y - 25 = 0$.
- f) Distanța de la punctul M la plan este $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Subiectul II

1.

- a) $\left\{ \frac{1}{2} \right\} + \left\{ \frac{2}{2} \right\} + \left\{ \frac{3}{2} \right\} = 1$.
- b) $n = 10$.
- c) $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(10) = 0$.
- d) Restul împărțirii polinomului f la g este 5.
- e) Probabilitatea căutată este $p = \frac{2}{3}$.

2.

- a) $f(1) = 2$.
- b) $f'(x) = 2007 \cdot x^{2006}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2007$.
- d) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$.
- e) $\frac{1}{2007}$.

Subiectul III

- a) Pentru $k = 2$ avem $A^2 = 0_2$, deci $A \in M$.
- b) Se arată prin calcul direct.
- c) Se arată prin calcul direct.

d) Considerăm $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2, X^k = 0_2 \Rightarrow \det(X) = 0.$

Notăm $t = \text{tr}(X) = a + d$. Din **b)** obținem $X^2 = t \cdot X$ (1)

Deducem că $O_2 = X^k = t^{k-1} \cdot X$, deci $X = O_2$ sau $t = 0$ și apoi că $X^2 = 0_2$.

e) Considerăm $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Presupunem că există $Z \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $Z^n = A$.

Avem că $Z^{2n} = A^2 = 0_2$, deci $Z \in M$. Din punctul **d)** rezultă că $Z^2 = 0_2$, deci $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem că $Z^n = 0_2 \neq A$, contradicție.

f) Din punctul **e)** deducem că $A \notin \text{Im } f$, deci f nu este surjectivă.

g) Considerăm $B \in M$. Obținem că $\det(I_2 + B + B^2 + \dots + B^{n-1}) = \det(I_2 + B)$.

Dacă $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, avem $\det(B) = -a^2 - bc = 0$, de unde deducem că

$$\det(I_2 + B) = 1 - a^2 - bc = 1.$$

Subiectul IV

a) $g'(x) = tg^2 x$, $\forall x \in (0, 1)$.

b) Avem $g'(x) > 0$, $\forall x \in (0, 1)$, deci funcția g este strict crescătoare pe $(0, 1)$.

c) Funcția g este strict crescătoare pe $(0, 1)$, deci $g\left(\frac{1}{2n}\right) \leq g\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq g\left(\frac{1}{n+1}\right)$,

de unde rezultă concluzia.

d) Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[k, k+1]$, și din teorema lui Lagrange pe acest interval, există $t_k \in (k, k+1)$, astfel încât

$$\frac{f(k+1) - f(k)}{k+1 - k} = f'(t_k) \quad \forall x > 0, \Leftrightarrow \text{există } t_k \in (k, k+1), \ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{t_k}$$

$$t_k \in (k, k+1) \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{t_k} < \frac{1}{k} \text{ și obținem } \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}.$$

e) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \stackrel{\text{d)}{<} 0$, aşadar sirul $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

este strict descrescător.

Dându-i lui k valori de la 1 la n în partea dreaptă a dublei inegalități din **d)** și adunând relațiile, obținem $c_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

În concluzie, sirul este strict descrescător și mărginit inferior, deci conform teoremei lui Weierstrass, el este convergent.

$$\mathbf{f)} \quad c_{2n} - c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln 2.$$

Obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_{2n} - c_n) + \ln 2 = \ln 2$.

g) Dându-i lui k valori de la 1 la n în dubla inegalitate din c) și adunând relațiile,

$$\text{găsim: } n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \leq a_n - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \leq n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+1}$$

și trecând la limită, obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln 2$.