

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta052

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$.
- (4p) b) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.
- (4p) c) Să se calculeze partea reală a numărului complex $z = (1+i)^2 - (1-i)^2$.
- (4p) d) Să se calculeze lungimea înălțimii din B a triunghiului ABC , dacă $AB = 10$, $BC = 24$, $CA = 26$.
- (2p) e) Să se calculeze cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$.
- (2p) f) Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta $2x + 4y = 3$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Să se calculeze $f(1) \cdot f(2) \cdots f(10)$.
- (3p) b) Să se determine câte numere de forma \overline{abc} există, cu $a, b, c \in \{1, 2\}$.
- (3p) c) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $2^{4x} - 3 \cdot 2^{2x} - 4 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve în \mathbf{Z}_3 ecuația $\hat{x}^4 = x$.
- (3p) e) Să se determine probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $\log_2 n \geq \frac{n-1}{2}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$.

- (3p) a) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se arate că $f(x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ și $P(A)$ mulțimea tuturor submulțimilor sale.

Dacă $X, Y \in P(A)$, notăm prin $X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$.

- (4p) a) Să se determine numărul elementelor mulțimii $P(A)$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $X, Y \in P(A)$, atunci $(X \cup Y) - (X \cap Y) \in P(A)$.
- (2p) c) Să se verifice că $X \Delta X = \emptyset$, $\forall X \in P(A)$.
- (2p) d) Să se verifice că $X \Delta \emptyset = \emptyset \Delta X = X$, $\forall X \in P(A)$.
- (2p) e) Să se arate că $X \Delta Y = Y \Delta X$, $\forall X, Y \in P(A)$.
- (2p) f) Considerând cunoscut că $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$, $\forall X, Y, Z \in P(A)$, să se arate că $(P(A), \Delta)$ este un grup comutativ.
- (2p) g) Să se rezolve în $P(A)$ ecuația $\{1, 2, 3, 4, 5\} \Delta X \Delta \{6, 7, 8, 9, 10\} = A$.
- (2p) h) Dacă $P(A) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, să se calculeze $X_1 \Delta X_2 \Delta \dots \Delta X_n$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$, $a \in (0, \infty)$, $h_k = \frac{k}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k}}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

și funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = n^2 x^2 - (4n-1)ax + 4a^2$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (4p) b) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x > 0$.
- (4p) c) Să se arate că $\frac{4}{x} + \frac{n^2}{a} > \frac{(n+1)(n+3)}{a+x}$, $\forall x > 0$.
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{n^2}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} < 2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty).$$
- (2p) e) Să se deducă inegalitatea $h_1 + h_2 + \dots + h_n < 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = 1$.
- (2p) g) Să se determine cel mai mic $c > 0$ astfel încât pentru orice sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere strict pozitive și orice $n \in \mathbb{N}^*$ să avem $h_1 + h_2 + \dots + h_n < c(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

Varianta 52

Subiectul I

a) 1. b) 10. c) 0. d) $\frac{120}{13}$. e) 0. f) $\frac{7}{2\sqrt{5}}$.

Subiectul II

1. a) $\frac{1}{11}$. b) 8. c) $2^{2x} \in \{-1,4\} \Rightarrow x = 1$. d) $x \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$. e) $P=1$.
2. a) $y=0$. b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 4)^2}$. c) 0,25. d) $f'(1) = -\frac{2}{25}$. e) $\frac{\pi}{4}$.

Subiectul III

- a) $\text{card}P(A) = 2^{10} = 1024$
- b) $X \cup Y \subset A, X \cap Y \subset A$, deci și $X \Delta Y \subset A$.
- c) $X \Delta X = \emptyset$.
- d) Verificare.
- e) $X \cup Y = Y \cup X$ și $X \cap Y = Y \cap X$.
- f) Putem folosi diferență simetrică sub forma: $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Comutativitatea rezultă din d), elementul neutru \emptyset din c), simetricul lui X este X din b), proprietatea de parte stabilă din a), asociativitatea este considerată cunoscută.
- g) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Delta A \Delta \{6, 7, 8, 9, 10\} = \emptyset$.
- h) $X_1 \Delta X_2 \Delta \dots \Delta X_n = \emptyset$, (se cuplează X și A-X).

Subiectul IV

- a) $f'(x) = 2n^2x - (4n - 1)a$.
- b) Din $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 4a^2 > 0, (\forall)x \in (0, \infty)$.
- c) Inegalitatea rezultă din b)..
- d) Pentru $n=1$ inegalitatea e evidentă. Presupunem inegalitatea adevărată pentru un $n \in \mathbb{N}$. Avem de demonstrat ca ea este adevarata pentru $n+1$, adica

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_1 + x_2} + \dots + \frac{n}{x_1 + \dots + x_n} + \frac{n+1}{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}} + \frac{(n+1)^2}{2(x_1 + \dots + x_{n+1})} < 2\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n+1}}\right).$$

Folosind $P(n)$, $P(n+1)$ se reduce la relația $\frac{(n+1)(n+3)}{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}} < \frac{n^2}{x_1 + \dots + x_n} + \frac{4}{x_{n+1}}$.

Aceasta rezulta din punctul c) pentru $a = x_{n+1}$ și $x = x_1 + \dots + x_n$.

- e) În d) înlocuim $x_1 \rightarrow \frac{1}{x_1}, x_2 \rightarrow \frac{1}{x_2}, \dots, x_n \rightarrow \frac{1}{x_n}$, iar ultimul termen din sumă se negligează.

f) Fie $a_n = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{\frac{1}{n+1} - 1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$

și cum $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

- g) Din e) rezultă $c \leq 2$. Fie c minim cu proprietatea $h_1 + h_2 + \dots + h_n < c(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

În relația anterioară punem $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n}$. Obținem

$$1 + \frac{2}{1+2} + \dots + \frac{n}{1+2+\dots+n} < c \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{n+1} < c \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \Leftrightarrow$$
$$2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) < c \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} < c$$

De unde făcând $n \rightarrow \infty$, rezultă că $c \geq 2$. Deci $c = 2$.