EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….051

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{5}+i\sqrt{3}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $E(1,2)$ la dreapta $x+y+1=0$.

(4p) **c)** Să se scrie ecuația cercului cu centrul în $E(1,2)$, care este tangent dreptei $x+y+1=0$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2)$, $M(3,3)$ și $N(5,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,4)$, $B(1,4,1)$, $C(4,1,1)$ și $D(-1,0,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2+3i)(4+5i)=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $C_{x+1}^{y+1}=\dfrac{x+1}{y+1}C_x^y$, $\forall x,y\in\mathbf{N}^*, x\ge y$.

(3p) **b)** Să se determine probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z_8}$ să verifice relația $\hat{x}^2=\hat{1}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+10$ are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(11)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 3^x-1=9^x$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f=X^3-X^2-2X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^7+1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1\left(e^x+\sin x\right)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulţimea $M_3(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi

funcţia $f: M_3(\mathbf{C})\to M_3(\mathbf{C}),\quad f(X)=X^{2007}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze A^2 şi A^3.

(4p) **c)** Să se arate că , dacă $Y\in M_3(\mathbf{C})$ şi $Y\cdot A=A\cdot Y$, atunci există $a,b,c\in\mathbf{C}$, astfel încât $Y=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă matricea $f(X)$ este inversabilă, atunci matricea $X\in \mathrm{M}_3(\mathbf{C})$ este inversabilă.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $Z=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$ unde $a,b,c\in\mathbf{C}$ şi $det(Z)=0$,atunci $Z^3=O_3$.

(2p) **f)** Să se găsească două matrice $U\neq V\in M_3(\mathbf{C})$, astfel încât $f(U)=f(V)$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că ecuaţia $f(X)=A$ nu are soluţie în mulţimea $M_3(\mathbf{C})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1 (x-x^2)^n\,dx$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze I_1.

(4p) **b)** Să se arate că $0\le x-x^2\le\frac{1}{4}, \forall x\in[0,1]$.

(4p) **c)** Să se deducă inegalităţile $0\le I_n\le\frac{1}{4^n}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că $I_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $n\ge 2$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot 4^n\cdot I_n\right)$.

Varianta 51

Subiectul I.

a) $2\sqrt{2}$.

b) $2\sqrt{2}$

c) Ecuația căutată este: $(x-1)^2+(y-2)^2-8=0$.

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN}=2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD}=15$.

f) $a=-7$ şi $b=22$.

Subiectul II.

1.

a) Calcul direct.

b) Probabilitatea căutată este $p=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

c) $g(11)=1$.

d) $x=0$.

e) $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1$.

2.

a) $f'(x)=\dfrac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{13}{10}$.

c) $f'(x)\geq 0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$, deci f e strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{7}{3}$.

e) $\displaystyle\int_0^1 \left(e^x+\sin x\right)dx=e-\cos 1$.

Subiectul III.

a) $\det(A)=0$ şi $\operatorname{rang}(A)=2$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ şi $A^3=O_3$.

c) Se arată prin calcul direct.

d) Dacă pentru $X\in M_3(\mathbf{C})$ avem $f(X)=X^{2007}$ inversabilă, atunci şi

$\det\left(X^{2007}\right)=\left(\det(X)\right)^{2007}\neq 0$, deci $\det(X)\neq 0$, adică X este inversabilă.

e) $\det(Z)=0$ implică $a=0$ şi se arată uşor că $Z^3=O_3$.

f) $U=A$, $V=O_3$.

g) Presupunem că există $X\in M_3(\mathbf{C})$ astfel încât $f(X)=A$.

Din $X^{2007}=A$ obținem că $\det(X)=0$.

Mai mult, deoarece $XA=AX$ din **c)** **şi** **e)** rezultă că $X^3=O_3$, deci $X^{2007}=\left(X^3\right)^{669}=O_3\neq A$, contradicție.

Subiectul IV.

a) $I_1=\dfrac{1}{6}$.

b) Evident.

c) Ridicând la puterea a n a şi apoi integrând dubla inegalitate de la **b)** obținem concluzia.

d) Se arată prin calcul direct.

e) Se foloseşte principiul I de inducție.

f) Din **d)** avem că $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $I_k=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2k}{2k+1}I_{k-1}$.

Înlocuindu-l succesiv pe k cu numerele $1, 2, ..., n$ în identitatea precedentă şi înmulțind relațiile obținute, deducem că $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $I_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot...\cdot\dfrac{2n}{2n+1}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot 4^n\cdot I_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot...\cdot\dfrac{2n}{2n+1}\cdot n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot...\cdot\dfrac{2n}{2n-1}$.

Din **e)** deducem: $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot...\cdot\dfrac{2n}{2n-1}>\sqrt{2n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot...\cdot\dfrac{2n}{2n-1}=+\infty$

şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot 4^n\cdot I_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot...\cdot\dfrac{2n}{2n-1}=+\infty$.