

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
**Varianta ....050**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $-4 - 3i$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele  $A(3, -2)$  și  $C(4, -3)$ .
- (4p) c) Să se calculeze suma de numere complexe  $S = i + i^3 + i^5 + i^7$ .
- (4p) d) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât punctele  $A(3, -2)$  și  $C(4, -3)$  să fie pe dreapta de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(3, -2)$ ,  $B(2, 2)$  și  $C(4, -3)$ .
- (2p) f) Să se determine distanța de la punctul  $O(0,0)$  la dreapta  $x + y - 1 = 0$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze elementul  $\hat{2}^{10}$  în  $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ .
- (3p) b) Să se calculeze expresia  $E = C_8^3 - C_8^5$ .
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația  $\log_5 x = 1$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $16^x - 32 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $3^n > 19$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{15} + 2x - 1$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} + 3}{5\sqrt{n} - 2}$ .

**SUBIECTUL III (20p)**

Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  și  $G = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid A \cdot A^T = I_2\}$ , unde

prin  $A^T$  am notat transpusa matricei  $A$ .

- (4p) a) Să se arate că  $I_2 \in G$  și  $C \in G$ .
- (4p) b) Să se arate că dacă  $A \in G$  și  $B \in G$ , atunci  $A \cdot B \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că dacă  $A \in G$ , atunci matricea  $A$  este inversabilă și  $A^{-1} \in G$ .
- (2p) d) Să se arate că  $(G, \cdot)$  este grup în raport cu înmulțirea matricelor.
- (2p) e) Să se arate că funcția  $f : G \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $f(A) = \det(A)$  este surjectivă dar nu este injectivă.
- (2p) f) Să se arate că mulțimea  $H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}$  este un subgrup al lui  $G$ .
- (2p) g) Să se dea exemplu de subgrup al lui  $G$  care are 2007 elemente.

**SUBIECTUL IV (20p)**

Se consideră funcțiile  $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $G : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ , definite prin

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \forall x \in (0,1], \quad g(0) = 1, \quad f(x) = \ln(1+x) - x, \quad h(x) = f(x) + \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in [0,1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad \forall x \in [0,1] \quad \text{și sirul } (a_n)_{n \geq 1}, \text{ definit prin } a_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$  și  $h'(x)$ ,  $x \in [0,1]$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f'(x) \leq 0$  și  $h'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [0,1]$ .
- (4p) c) Să se arate că  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ ,  $\forall x \in [0,1]$ .
- (2p) d) Să se arate că funcția  $g$  este continuă pe intervalul  $[0,1]$ .
- (2p) e) Să se arate că  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$  și că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- (2p) f) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că  $n \cdot a_n = G(1) - \int_0^1 G(x^n)dx$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = G(1)$ .

### Varianta 050

#### **Subiectul I**

a) 5. b)  $\sqrt{2}$ . c) 0. d)  $a = 1; b = -5$ . e)  $A = \frac{3}{2}$ . f)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

#### **Subiectul II**

1) a) 0. b) 0. c) 5. d)  $\frac{5}{4}$ . e)  $3^1 < 19, 3^2 < 19, 3^3 > 19, 3^4 > 19, 3^5 > 19 \Rightarrow p = \frac{3}{5}$ .

2) a)  $15x^{14} + 2$ . b)  $\frac{1}{16}$ . c)  $f'(0) = 2$ . d)  $f'(x) > 0$ . e)  $\frac{2}{5}$ .

#### **Subiectul III**

a) Verificare directă.

b)  $AA^t = I_2$  și  $BB^t = I_2$ .

Avem:  $(AB) \cdot (AB)^t = (AB) \cdot (B^t \cdot A^t) = A(BB^t)A^t = AI_2A^t = AA^t = I_2 \Rightarrow AB \in G$ .

c) Fie  $A \in G \Rightarrow A \cdot A^t = I_2 \Rightarrow A^{-1} = A^t$ .

d) Se verifică axiomele grupului.

e)  $f(I_2) = 1, f(C) = -1 \Rightarrow f$  surjectivă.

Cum  $I_2 \in G, B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \in G, f(I_2) = f(B) = 1 \Rightarrow f$  nu este injectivă.

f) Fie  $R_a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}, R_a \cdot R_b = R_{a+b}, (R_a)^{-1} = R_{-a}$ .

g) Fie  $D = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{2007} & -\sin \frac{2\pi}{2007} \\ \sin \frac{2\pi}{2007} & \cos \frac{2\pi}{2007} \end{pmatrix}$ . Construim subgrupul H al lui G.

$H = \{D^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{D^n \mid n = \overline{0, 2006}\}$ .

#### **Subiectul IV**

a)  $f'(x) = \frac{-x}{x+1}; h'(x) = \frac{x^2}{1+x}; (\forall)x \in [0,1]$ .

b) Evident:  $f'(x) \leq 0$  și  $h'(x) \geq 0, (\forall)x \in [0,1]$ .

c) Din b) rezultă  $f$  strict descrescătoare și  $h$  strict crescătoare, deci  $\ln(1+x) \leq x$  și  $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0, (\forall)x \in [0,1]$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 1 \Rightarrow g$  continuă la dreapta și în punctul  $x_0 = 0$ .

e) Avem :

$$0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n, (\forall)x \in [0,1], (\forall)n \geq 1. \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, (\forall)n \geq 1,$$

adică  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$ , oricare ar fi  $n \geq 1$ . Utilizând criteriul cleștelui obținem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

f)  $\int_0^1 G(x^n) dx = \int_0^1 x' \cdot G(x^n) dx = x \cdot G(x) \Big|_0^1 - n \cdot \int_0^1 x^n \cdot g(x^n) dx$

Cum  $x^n \cdot g(x^n) = \begin{cases} x^n \cdot \frac{\ln(1+x^n)}{x^n}, & x \in (0,1] \\ 0 \cdot 1, & x=0 \end{cases} = \ln(1+x^n), \quad \forall x \in [0,1], \text{ obținem}$

$$\int_0^1 G(x^n) dx = G(1) - n \cdot \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = G(1) - n \cdot a_n, \text{ rezultă concluzia.}$$

g) Avem:  $|n \cdot a_n - G(1)| = \left| \int_0^1 G(x^n) dx \right| \leq \int_0^1 |G(x^n)| dx.$

$$|G(x)| = \left| \int_0^x g(t) dt \right| \leq \int_0^x |g(t)| dt \leq Hx; \text{ unde } H = \sup_{t \in [0,1]} |g(t)|.$$

Prin urmare  $|G(x^n)| \leq Hx^n, (\forall)x \in [0,1]; (\forall)n \geq 1.$

Deci  $|na_n - G(1)| \leq H \int_0^1 x^n dx = \frac{H}{n+1}; (\forall)n \geq 1.$

Cum:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H}{n+1} = 0$ ; avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = G(1).$