

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta049

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine partea reală a numărului complex $z = i^6 + i^7$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,-2), B(2,0), C(0,4)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos^2(75^\circ) + \cos^2(15^\circ)$.
- (4p) d) Să se determine în câte puncte se intersecțează dreapta de ecuație $y = 1$ cu cercul de centru $O(0,0)$ și de rază egală cu 1.
- (2p) e) Să se determine câte puncte cu ambele coordonate întregi sunt situate în interiorul cercului cu centru în $O(0,0)$ și de rază egală cu 1.
- (2p) f) Să se scrie ecuația unei drepte paralele cu dreapta de ecuație $3x - y - 2 = 0$ care trece prin punctul $O(0,0)$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt[3]{3}$.
- (3p) b) Să se determine câte numere de 2 cifre scrise în baza 10 nu conțin cifrele 2, 3, 4 și 5.
- (3p) c) Să se determine câte numere întregi c satisfac: $2 < \log_2 c < 3$.
- (3p) d) Să se determine câte numere întregi d satisfac relația $\left\lceil \frac{2d}{3} \right\rceil = 2$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- (3p) e) Să se dea un exemplu de polinom de gradul al treilea cu coeficienți întregi pentru care produsul rădăcinilor sale este egal cu 2.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) c) Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = f(\sqrt{3})$ și $b = f(2)$.
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Descarcă de pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$ și polinomul $f = X^n - (\cos 2na + i \sin 2na)$, cu rădăcinile noteate $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{C}$ și formulele

$$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a, \quad 1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a \quad \text{și} \quad 2 \sin a \cos a = \sin 2a, \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$ și $f(-1)$.
- (4p) b) Să se verifice identitatea $1 - \cos 2x - i \sin 2x = -2i \sin x(\cos x + i \sin x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se verifice identitatea $1 + \cos 2x + i \sin 2x = 2 \cos x(\cos x + i \sin x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $x_k = \cos\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right)$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
- (2p) e) Să se arate că $f = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \left(\cos\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right) \right) \right)$.
- (2p) f) Să se arate că $\sin na = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$, $\forall a \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3$.
- (2p) g) Să se arate că $\cos(2p+1)a = 2^{2p} (-1)^p \prod_{k=0}^{2p} \cos\left(a + \frac{k\pi}{2p+1}\right)$, $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, unde $g(x) = \frac{ex}{e-1} + 1$, iar f este

continuă în $x = 0$, $f(0) = 1$ și $f(x) - f\left(\frac{x}{e}\right) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se arate că funcția g verifică relațiile $g(0) = 1$ și $g(x) - g\left(\frac{x}{e}\right) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n} = \frac{e}{e-1} \left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n}\right)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x \cdot e^{-n-1})$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că $f\left(\frac{x}{e}\right) - f\left(\frac{x}{e^2}\right) = \frac{x}{e}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se arate că $f\left(\frac{x}{e^n}\right) - f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) = \frac{x}{e^n}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) g) Să se determine $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Varianta 49

Subiectul I.

- a) $\operatorname{Re}(z) = -1$.
 b) 5.
 c) $\cos^2 75^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$.
 d) Unicul punct de intersecție dintre dreapta și cerc este $A(0, 1)$.
 e) Există un singur punct cu proprietatea din enunț: $O(0, 0)$.
 f) $y = 3x$.

Subiectul II.

1.

- a) $a < b$.
 b) 30.
 c) Există trei numere care satisfac enunțul.
 d) Există două numere care satisfac enunțul.
 e) $f = X^3 - 2 \in \mathbf{Z}[X]$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+3)^2}, \forall x \in \mathbf{R}$.
 b) $x = -\sqrt{3}$ și $x = \sqrt{3}$ sunt punctele de extrem ale lui f .
 c) $a > b$.
 d) Dreapta $Ox: y = 0$ este asimptota (orizontală) spre $+\infty$ la graficul funcției f .
 e) $\int_0^1 f(x) dx = \ln \frac{4}{3}$.

Subiectul III.

- a) $f(1) = 1 - (\cos 2na + i \cdot \sin 2na)$ și $f(-1) = (-1)^n - (\cos 2na + i \cdot \sin 2na)$.
 b) Calcul direct.
 c) Calcul direct
 d) Evident.
 e) Deoarece $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{C}$ sunt rădăcinile polinomului f , putem scrie

$$f = \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k) \stackrel{\text{d)}{=} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \left(\cos \left(2a + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(2a + \frac{2k\pi}{n} \right) \right) \right).$$

f) Din a) și b) deducem:

$$f(1) = 1 - (\cos 2na + i \cdot \sin 2na) = -2i \cdot \sin na \cdot (\cos na + i \cdot \sin na) \quad (1)$$

Folosind e) obținem:

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\cos\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right) \right) \right)^{\text{b)}=} \\
 &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(-2i \cdot \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \right) \left(\cos\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \right) = \\
 &= (-2i)^n \cdot (\cos na + i \cdot \sin na) \cdot \left(\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) \right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right). \\
 \text{În plus, } \forall a \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3, (-2i)^n \cdot \left(\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) \right) &= -2^n \cdot i
 \end{aligned}$$

Ținând cont de (1), deducem concluzia.

g) Din **a)** și **c)** deducem, pentru $n = 2p+1$, cu $p \in \mathbf{N}^*$:

$$f(-1) = -2 \cos(2p+1)a \cdot (\cos(2p+1)a + i \cdot \sin(2p+1)a) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Din e) obținem: } f(-1) &= \prod_{k=0}^{2p} \left(-1 - \left(\cos\left(2a + \frac{2k\pi}{2p+1}\right) + i \cdot \sin\left(2a + \frac{2k\pi}{2p+1}\right) \right) \right)^{\text{c)}} = \\
 &= \prod_{k=0}^{2p} \left(-2 \cos\left(a + \frac{k\pi}{2p+1}\right) \right) \left(\cos\left(a + \frac{k\pi}{2p+1}\right) + i \cdot \sin\left(a + \frac{k\pi}{2p+1}\right) \right) = \\
 &= -2^{2p+1} \cdot (-1)^p \cdot (\cos(2p+1)a + i \cdot \sin(2p+1)a) \cdot \prod_{k=0}^{2p} \cos\left(a + \frac{k\pi}{2p+1}\right)
 \end{aligned}$$

și ținând cont de (2) deducem concluzia.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) Evident.

$$\text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n} \right)^{\text{b)}} = \frac{e}{e-1}.$$

d) Pentru $x \in \mathbf{R}$, deoarece f este continuă în 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x \cdot e^{-n-1}) = f(0)$.

e) Evident, înlocuind x cu $\frac{x}{e} \in \mathbf{R}$ în relația din enunț.

f) Evident, înlocuind x cu $\frac{x}{e^n} \in \mathbf{R}$ în relația din enunț.

g) Din **f)**, dându-i succesiv lui n valorile 0, 1, 2, ..., n și adunând relațiile, rezultă:

$$f(x) - f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) = x \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{e^k} \text{ și } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x \cdot \left(1 + \frac{1}{e} + \dots + \frac{1}{e^n} \right) + f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) \right)^{\text{c),d)} \frac{x \cdot e}{e-1} + f(0)$$

Funcțiile continue cu proprietatea din enunț sunt:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x \cdot e}{e-1} + a, \text{ cu } a \in \mathbf{R}.$$