

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta048

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $E(-1,1)$ la dreapta $x - y + 1 = 0$.
- (4p) c) Să se scrie ecuația cercului cu centru în $E(-1,1)$ care este tangent la dreapta $x - y + 1 = 0$.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $L(1, 2)$, $M(2, 4)$ și $N(3, 8)$.
- (2p) e) Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC cu $AB = 2$, $AC = 3$ și $m(\hat{B}AC) = 60^\circ$.
- (2p) f) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 2)$ și $C(2, 3, 1)$ să aparțină planului $x + ay + bz + c = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze a_7 , dacă $\frac{1}{7} = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_3$ să verifice relația $\hat{x}^{2007} = \hat{1}$.
- (3p) c) Să se calculeze suma $C_5^0 + C_5^1 + \dots + C_5^5$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = 12$.
- (3p) e) Să se calculeze suma termenilor raționali ai dezvoltării binomului $(2 + \sqrt{3})^3$.

 2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este bijectivă.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \ln(x+1) dx$.
Descarcă și printă pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$. Notăm

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k, \forall k \in \mathbf{N}^*, S_0 = 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \text{ și } \Delta = \det(A \cdot A^T), \text{ unde prin } A^T$$

am notat transpusa matricei A . Se știe că $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in M_3(\mathbf{C})$.

- (4p) a) Să se verifice că $S_1 = 0$ și $S_2 = -2a$.
- (4p) b) Să se arate că $S_{n+3} + aS_{n+1} + bS_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (4p) c) Să se calculeze S_3 și S_4 numai în funcție de a și b .
- (2p) d) Să se verifice că $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}$.
- (2p) e) Să se calculeze Δ în funcție de a și b .
- (2p) f) Să se arate că dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, atunci $\Delta \geq 0$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $\Delta \geq 0$, atunci $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră integralele $I_n = \int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x \dots \cos nx dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Se admite cunoscută formula $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se calculeze $\int_0^{2\pi} \cos kx dx$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) b) Să se calculeze integrala I_2 .
- (4p) c) Să se arate că dacă $n \in \{5, 6\}$, atunci $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n \neq 0$, pentru orice alegere a semnelor.
- (2p) d) Să se arate că există o alegere a semnelor astfel încât $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n = 0$, dacă și numai dacă $n \in \mathbf{N}^*$ este un număr de forma $4k$ sau $4k+3$.
- (2p) e) Să se arate că $I_n \neq 0$ dacă și numai dacă n este un număr de forma $4k$ sau $4k+3$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n}$.
- (2p) g) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, notăm cu $A_n = \{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid I_k \neq 0\}$ și cu a_n numărul de elemente ale lui A_n . Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$.

Varianta 48

Subiectul I.

- a) $|\vec{v}| = 5$.
- b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c) $(x+1)^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{2} = 0$.
- d) Aria triunghiului LMN este $S = 1$.
- e) $BC = \sqrt{7}$.
- f) $a = b = 1$, $c = -6$.

Subiectul II.

1.

- a) $a_7 = 1$.
- b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{3}$.
- c) 32.
- d) $x = 1$.
- e) 26.

2.

- a) $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$, $\forall x > 0$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n)) = +\infty$
- c) $f''(x) > 0$, $\forall x > 0$, deci funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
- d) Se arată că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ și f este strict descrescătoare și continuă pe $(0, \infty)$, deci f este bijективă.
- e) $\int_0^1 \ln(x+1) dx = 2 \cdot \ln 2 - 1$.

Subiectul III.

- a) $S_1 = 0$ iar $S_2 = -2a$.
- b) x_k rădăcină a lui $f \Leftrightarrow x_k^3 = -ax_k - b \Rightarrow x_k^{n+3} = -a \cdot x_k^{n+1} - b \cdot x_k^n$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$ și adunând egalitățile rezultă $S_{n+3} + aS_{n+1} + bS_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- c) $S_3 = -3b$ și $S_4 = 2a^2$.
- d) Se verifică prin calcul direct.

e) Din d) obținem $\Delta = -4a^3 - 27b^2$.

f) Considerăm $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$. Atunci $\det(A) \in \mathbf{R}$, deci $(\det(A))^2 \geq 0$.

Mai mult, $\Delta = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = (\det(A))^2 \geq 0$.

g) Avem $\det(A) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$, deci

$$\Delta = (\det(A))^2 = ((x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2 \stackrel{ip}{\geq} 0 \quad (1)$$

Dacă f nu are toate rădăcinile reale, acestea sunt de forma $\begin{cases} x_1 = -2c \\ x_2 = c + d \cdot i, \text{ cu} \\ x_3 = c - d \cdot i \end{cases}$

$$c, d \in \mathbf{R}, d \neq 0.$$

$$\text{Atunci, (1)} \Leftrightarrow (3c + d \cdot i)^2(3c - d \cdot i)^2(-2d \cdot i)^2 = -4d^2(9c^2 + d^2)^2 \geq 0, \text{ fals.}$$

Subiectul IV.

a) Pentru $k \in \mathbf{N}^*$, $\int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = 0$.

b) $I_2 = 0$.

c) Pentru $n = 5$, în mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sunt 3 numere impare, deci indiferent de semnele pe care le alegem în fața numerelor 1, 2, 3, 4, 5, vom obține un număr impar. Se raționează la fel pentru $n = 6$.

d) „ \Rightarrow ” E posibil să existe o alegere a semnelor în suma $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n$ astfel încât să obținem numărul 0, doar dacă în mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ există un număr par de numere impare, adică dacă $n \in \mathbf{N}^*$ este un număr de forma $4k$ sau $4k + 3$.

„ \Leftarrow ” Dacă $n = 4k$, o combinație potrivită de semne este:

$$(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \dots + ((4k - 3) - (4k - 2) - (4k - 1) + (4k)) = 0$$

iar dacă $n = 4k + 3$, o combinație potrivită de semne este:

$$(1 + 2 - 3) + (4 - 5 - 6 + 7) + \dots + ((4k) - (4k + 1) - (4k + 2) + (4k + 3)) = 0.$$

e) Se demonstrează prin inducție că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$,

$$2^n \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx = \sum \cos(\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n)x \quad (1)$$

în suma anterioară apărând toate combinațiile posibile ale semnelor.

$$\text{Atunci } 2^n \cdot I_n = \sum_0^{2\pi} \cos(\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n)x \, dx.$$

Dacă $n = 4k + 1$ sau $n = 4k + 2$, folosind d) și a) deducem că $I_n = 0$.

Dacă $n = 4k$ sau $n = 4k + 3$, membrul drept este o sumă de integrale dintre care

$$\text{unele sunt egale cu } 0, \text{ iar altele sunt egale cu } \int_0^{2\pi} 1 \, dx = 2\pi, \text{ aşadar } I_n \neq 0.$$

f) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $\left| \frac{I_n}{n} \right| \leq \frac{\int_0^{2\pi} 1 dx}{n} = \frac{2\pi}{n}$, aşadar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n} = 0$.

g) Pentru $p \in \mathbf{N}^*$, obținem $a_{4p} = a_{4p+1} = a_{4p+2} = 2p$ și $a_{4p+3} = 2p+1$.

Cum $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_{4p}}{4p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_{4p+1}}{4p+1} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_{4p+2}}{4p+2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_{4p+3}}{4p+3} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$.