

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta047

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care dreptele $d_1 : x + y - 1 = 0$ și $d_2 : 2x + ay + 3 = 0$ sunt paralele.
- (4p) b) Să se determine numărul diagonalelor unui poligon convex cu 5 laturi .
- (4p) c) Să se calculeze modulul numărului complex $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^7$.
- (4p) d) Să se calculeze raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 2x = 3$.
- (2p) e) Să se calculeze suma $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4}$.
- (2p) f) Să se calculeze aria unui pătrat care are perimetrul egal cu 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ și se notează cu a, b

rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

- (3p) a) Să se determine valoarea minimă a funcției f .
- (3p) b) Să se calculeze valoarea sumei $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
- (3p) c) Să se determine numerele reale y pentru care $f(3^y) = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $f(\log_2 t) = 0$, $t \in (0, \infty)$.
- (3p) e) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se rezolve inecuația $f(x) \leq \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \cdot f(n))^{2n}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X + 2$.

- (4p) a) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale .
 (4p) b) Să se arate că polinomul f are o singură rădăcină reală.

Notăm cu $a \in \mathbf{R}$ unica rădăcină reală a polinomului f și cu $\mathbf{Q}(a) = \{g(a) \mid g \in \mathbf{Q}[X]\}$.

- (4p) c) Să se verifice că $0 \in \mathbf{Q}(a)$ și $1 \in \mathbf{Q}(a)$.
 (2p) d) Să se arate că dacă $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}(a)$, atunci $\alpha + \beta \in \mathbf{Q}(a)$ și $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{Q}(a)$.
 (2p) e) Să se arate că $\mathbf{Q}(a) = \{p + qa + ra^2 \mid p, q, r \in \mathbf{Q}\}$.
 (2p) f) Să se arate că, dacă $p, q, r \in \mathbf{Q}$ și $p + qa + ra^2 = 0$, atunci $p = q = r = 0$.
 (2p) g) Să se arate că $a^{2006} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f'_n(x) = f_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
 (4p) b) Să se verifice că $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + f_n(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
 (4p) c) Să se arate că $f_2(x) \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
 (2p) d) Să se verifice că $1 + \int_0^x f_n(t) dt = f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
 (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_{2n}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
 (2p) f) Să se arate că funcția f_{2007} este bijectivă .
 (2p) g) Să se arate că funcția f_{2006} este convexă pe \mathbf{R} .

Varianta 47

Subiectul I.

- a) $a = 2$.
- b) 5.
- c) $|z| = 1$.
- d) Raza cercului este $r = 2$.
- e) $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} = 0$.
- f) Aria pătratului este $S = 4$.

Subiectul II.

1.

- a) $y_V = -\frac{1}{4}$ este valoarea minimă a funcției f .
- b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2}$.
- c) $y \in \{0, \log_3 2\}$.
- d) $t \in \{2, 4\}$.
- e) $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = 2$.

2.

- a) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbf{R}$.
- b) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
- c) Ecuatia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $Ox: y = 0$.
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \cdot f(n))^{2^n} = 1$.
- e) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$.

Subiectul III.

- a) Se arată prin reducere la absurd.
- b) Funcția polinomială asociată polinomului f este strict crescătoare și de grad impar.
- c) Pentru $f \in \mathbf{Q}[X]$, avem $f(a) = 0$, deci $0 \in \mathbf{Q}(a)$.
Considerăm polinomul $g = f + 1 \in \mathbf{Q}[X]$. Deoarece $g(a) = f(a) + 1 = 1$, $1 \in \mathbf{Q}(a)$.
- d) Evident.

e) Se arată prin dublă incluziune. La „ \subset ” se folosește teorema împărțirii cu rest, pentru polinoamele g și f .

f) Deoarece $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ este rădăcină a lui f , avem $a^3 = -2a - 2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

Considerăm $p, q, r \in \mathbf{Q}$, astfel încât $p + qa + ra^2 = 0$.

Înmulțind relația precedentă cu $a \neq 0$ și reducându-l pe a^2 , deoarece $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, rezultă $pqr = 2r^2q + q^3 = -2r^3$, adică $q^3 + 2r^2q + 2r^3 = 0$ (1)

Dacă $r \neq 0$, împărțind relația precedentă la $r^3 \neq 0$ deducem că $\alpha = \frac{q}{r} \in \mathbf{Q}$ este o rădăcină a lui f , contradicție cu punctul a).

Obținem că $r = 0$ și din apoi $q = 0$ și $p = 0$.

g) Presupunem că $a^{2006} = t \in \mathbf{Q}$. Considerăm polinomul $g \in \mathbf{Q}[X]$, $g = X^{2006} - t$.

Se arată că $g = f \cdot q$, deci toate rădăcinile lui f sunt și rădăcini ale lui g . Deoarece toate rădăcinile lui g au același modul, rezultă că și rădăcinile a, x_2, x_3 ale lui f

sunt de module egale. Avem $|a|^3 = |a \cdot x_2 \cdot x_3| = \left| -\frac{2}{1} \right| = 2$, de unde rezultă $a = -\sqrt[3]{2}$.

Cum $f(-\sqrt[3]{2}) = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \neq 0$, am ajuns la o contradicție, așadar $a^{2006} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Subiectul IV.

a) Se arată prin calcul direct.

b) Se arată prin calcul direct.

c) $f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

d) Se arată prin calcul direct.

e) Se folosește principiul întâi al inducției matematice și punctul b).

f) Din punctul e) știm că $f_{2006}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și cum $f'_{2007} = f_{2006}$, deducem că funcția f_{2007} este strict crescătoare pe \mathbf{R} , deci injectivă.

Deoarece f_{2007} este continuă pe \mathbf{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{2007}(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{2007}(x) = +\infty$,

rezultă că $\text{Im } f = \mathbf{R}$, deci f este și surjectivă. În concluzie, f este bijectivă.

g) Din punctul a) deducem că $f''_{2006}(x) = f'_{2005}(x) = f_{2004}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, de unde rezultă că funcția f_{2006} este convexă pe \mathbf{R} .