

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta046

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{4-3i}{4+3i}$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(3, -2)$ și $C(4, -3)$.
- (4p) c) Să se calculeze produsul de numere complexe $p = i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, -2)$ și $C(4, -3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3, -2)$, $B(2, 2)$ și $C(4, -3)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(5+6i)^2 = a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze elementul $\hat{2}^{2006}$ în (\mathbf{Z}_8, \cdot) .
- (3p) b) Să se calculeze expresia $E = C_{10}^3 - C_{10}^7 + C_8^8$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x = -2$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x - 2 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n > 10$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 7x - 3$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + 3}{\ln n - 2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Pe $M_2(\mathbf{R})$ se consideră legea de compoziție $X * Y = X \cdot Y + X + Y$,

$$X, Y \in M_2(\mathbf{R}) \text{ și mulțimea } G = \left\{ A \in M_2(\mathbf{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \neq -1 \right\}.$$

- (4p) a) Să se arate că „*” este lege de compoziție pe G .
- (4p) b) Să se arate că legea „*” este asociativă.
- (4p) c) Să se determine elementul neutru $E \in M_2(\mathbf{R})$, în raport cu legea „*”.
- (2p) d) Să se determine simetrica matricei $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în raport cu legea „*”.
- (2p) e) Să se determine matricele $X \in G$, care verifică ecuația $X * X = 3I_2$.
- (2p) f) Să se determine $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$, pentru $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$\underbrace{I_2 * I_2 * \dots * I_2}_{n \text{ ori } I_n} = (2^n - 1)I_2, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2.$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, cu $a_0 \in (0, \pi)$ și $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbf{N}$.

- (4p) a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare și bijectivă.
Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, notăm cu b_n unica soluție a ecuației $f(x) = n$.
- (4p) b) Să se arate că sirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict crescător.
- (4p) c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.
- (2p) d) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 1$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $a_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ atunci sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict crescător.
- (2p) f) Să se arate că dacă $a_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ atunci sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict descrescător.
- (2p) g) Să se arate că pentru orice $a_0 \in (0, \pi)$ sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{2}.$$

Varianta 046

Subiectul I

a) 1. b) $\sqrt{2}$. c) 1. d) $a = 1; b = -1$. e) $S = \frac{3}{2}$. f) $c = -11, b = 60$.

Subiectul II

1. a) 0. b) 1. c) $\frac{1}{25}$. d) $x = \frac{1}{4}$. e) $\frac{3}{5}$.

2. a) $f'(x) = 5x^4 + 7$. b) $\frac{2}{3}$. c) $f'(0) = 7$. d) $f'(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$. e) 1

Subiectul III

a) $(X * Y) * Z = X * (Y * Z) = XYZ + XY + XZ + YZ + X + Y + Z$.

b) $E = 0$.

c) $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}; X * Y = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + a_1 + a_2 & a_1 a_2 + a_2 b_1 + b_1 + b_2 \\ 0 & a_1 a_2 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$

$a_1 a_2 + a_1 + a_2 + 1 = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \neq 0$.

d) $I' I_2 + I' + I_2 = 0 \Rightarrow I' = -\frac{1}{2} I_2$.

e) $X^2 + 2X = 3I_2; X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 + 2a = 3, b(a+1) = 0 \Rightarrow a \in \{1, -3\} \text{ si } b = 0 \Rightarrow X_1 = I_2, X_2 = -3I_2$.

f) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \left(aI_2 + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = a^n I_2 + C_n^1 a^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \text{ (deoarece } \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = 0, (\forall) k \geq 2)$.

g) $n = 2, I_2 * I_2 = 3I_2$

$I_2 * I_2 * \dots * I_2 * I_2 = ((2^n - 1)I_2) * I_2 = 2(2^n - 1)I_2 + I_2 = (2^{n-1} - 1)I_2$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0, (\forall) x \in \mathbf{R} \text{ si } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ f este strict crescatoare

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ f este continua (cu proprietatea lui Darboux) $\Rightarrow \text{Im}f = \mathbf{R}$

b) $b_n = f^{-1}(n), f^{-1}$ este strict crescătoare deci $b_{n+1} > b_n, n \in \mathbf{N}$.

c) Deoarece $(b_n)_n$ este monoton există $\lim_{x \rightarrow \infty} b_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x)$.

Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbf{R}$, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = b \Rightarrow f(b) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(f^{-1})(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

d) $b_n + \cos b_n = n \Rightarrow \frac{b_n}{n} + \frac{\cos b_n}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} + 0 = 1$

e) Daca $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci din a $\Rightarrow f(x) \in (f(0), f(\frac{\pi}{2})) = (1, \frac{\pi}{2}) \subset (0, \frac{\pi}{2})$.

Daca $a_0 \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow a_n \in (0, \frac{\pi}{2}), n \in \mathbf{N}$. $a_{n+1} - a_n = \cos a_n > 0$.

f) Daca

$$x \in (\frac{\pi}{2}; \pi), \text{ atunci din a) } \Rightarrow f(x) \in (f(\frac{\pi}{2}), f(\pi)) = (\frac{\pi}{2}, \pi - 1) \subset (\frac{\pi}{2}, \pi),$$

$$\text{deci } a_0 \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \Rightarrow a_n \in (\frac{\pi}{2}, \pi), n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \cos a_n < 0.$$

g) Din e) si f) si din $a_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_n = \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$, rezulta ca sirul $(a_n)_n$ este monoton si marginit pentru orice

$a_0 \in (0, \pi)$. Deoarece f este continua $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \Rightarrow$

$$a = f(a) \Leftrightarrow a + \cos a = a, a \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}.$$