

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta045

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(4,3,2)$ la planul $x + y + z + 10 = 0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2 + 4y^2 = 40$ dusă prin punctul $P(2, -3)$.
- (4p) d) Să se arate că triunghiul cu vârfurile în punctele $A(3, 0)$, $B(0, 4)$ și $C(3, 4)$ este dreptunghic.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3, 0)$, $B(0, 4)$ și $C(3, 4)$.
- (2p) f) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât vectorul $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ să fie perpendicular pe vectorul $\vec{w} = a\vec{i} + \vec{j}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p)

- a) Să se calculeze determinantul
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$
.

(3p)

- b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_{12}$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

(3p)

- c) Să se calculeze numărul termenilor iraționali ai dezvoltării binomului $(1 + \sqrt{2})^4$.

(3p)

- d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $x^3 + x^2 - 2 = 0$.

(3p)

- e) Să se calculeze inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

- (3p) e) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f_n \in \mathbf{C}[X]$, definite prin $f_0 = 1$, $f_1 = X$, $f_2 = \frac{X(X-1)}{1 \cdot 2}, \dots$,

$$f_n = \frac{X(X-1) \cdot \dots \cdot (X-n+1)}{n!}, \dots, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se arate că $f_n(k) = C_k^n$, $\forall k, n \in \mathbf{N}^*$, $n \leq k$.
- (2p) b) Să se arate că $f_n(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.
- (4p) c) Să se găsească un polinom g de gradul trei cu coeficienți raționali, cel puțin unul neîntreg, astfel încât $g(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.
- (4p) d) Să se arate că $\text{grad}(f_n) = n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $h \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom de grad 3, atunci există $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{C}$, unice, astfel încât $h = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $w \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom de grad 3, astfel încât $w(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci $w(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $u \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom de grad 3, astfel încât $u(k) \in \mathbf{Z}$, $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci există $p \in \mathbf{Z}$, astfel încât $u(k) \neq p$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f_0(x) = 1 - \cos x$ și

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $f_1(x) = x - \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
 - (4p) b) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - (4p) c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x > 0$.
 - (2p) d) Să se arate că graficul funcției f_1 nu are asimptotă către ∞ .
 - (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$,
- $$f_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^2}{2!} + (-1)^n + (-1)^{n+1} \cos x.$$
- (2p) f) Să se arate că $0 \leq f_n(x) \leq 2 \cdot \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x > 0$.
 - (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) = \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 045

Subiectul I

a) $\sqrt{2}$. b) $\frac{19}{\sqrt{3}}$. c) $x-6y=20$. d) $c=\frac{\pi}{2}$. e) 6. f) $a=-2$.

Subiectul II

1. a) 0. b) $\frac{1}{3}$. c) 2. d) 1. e) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) e^x-1 . b) $e-\frac{5}{2}$. c) $f''(x)>0$. d) $e-1$. e) $f(x)\geq 0$. ($\forall x \in \mathbb{R}$).

Subiectul III

a) $f_n(k)=\frac{k(k-1)...(k-n+1)}{n!}=C_k^n$. $k \geq n$.

b) Pentru $k \geq n$, $f_n(k)=C_k^n \in \mathbb{Z}$.

Pentru $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ $f_n(k)=0 \in \mathbb{Z}$.

Pentru $k < 0$. $f_n(k)=\frac{(-1)^n(-k)(-k+1)...(-k+n-1)}{n!}=(-1)^n C_{-k+n-1}^n \in \mathbb{Z}$.

c) Luam $g=f_3=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$ care are toti coeficientii neintregi, iar $f_3(k) \in \mathbb{Z}$.

$(\forall k \in \mathbb{Z})$.

d) Cum f_n are n factori de gradul 1 \Rightarrow grad $f_n=n$.

e) Demonstram ca exista $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ unice a.i $h=a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-1)}{2} + a_3 \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$

$x=0$. $h(0)=a_0$.

$x=1$. $h(1)=a_0+a_1$. deci $a_1=h(1)-h(0)$.

$x=2$. $a_2=h(2)-2h(1)+h(0)$.

$x=3$. $a_3=h(3)-a_0-3a_1$.

Astfel am demonstrat ca a_0, a_1, a_2, a_3 sunt determinate in mod unic.

f) Fie $w=a_0f_0+a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3$ conf lui e) luam $w(0)=a_0 \in \mathbb{Z}$.

$w(1)=a_0+a_1 \in \mathbb{Z}$. $w(2)=a_0+2a_1+a_2 \in \mathbb{Z}$.

$w(3)=a_0+3a_1+3a_2+a_3 \in \mathbb{Z}$ rezulta ca $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$.

De aici si din $f_n(k) \in \mathbb{Z}$. $(\forall k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow w(k) \in \mathbb{Z}$.

g) Din e $\Rightarrow u=a_0f_0+a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3$ cu $a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow u(k) \in \mathbb{Z}$. $(\forall k \in \mathbb{Z})$

avem: $u=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$, $b_i \in \mathbb{Q}$

Analizam cazul $b_3>0$ (cazul $b_3<0$ este similar)

Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$ si exista $A \in \mathbb{R}$ astfel ca $u(x) \leq u(A)$, $\forall x \leq A$ si u este strict crescatoare pe $[A, \infty)$

Polinomul $v(x)=u(x+1)-u(x)$ are gradul doi si $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$

Exista $B > A$ astfel ca $u(x+1)-u(x) \geq 2$, $\forall x \geq B$. Daca alegem $M \in \mathbb{N}$, $M > B$ si $u(M+1) \geq M+2$ deci $u(k) \neq M+1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Subiectul IV

a) se verifica usor.

b) $f_2(x) = \int_0^x t - \sin t dt = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$.

c) Fie $a_n = \frac{x^n}{n!}$. (\forall) $n \in \mathbb{N}^*$, avem $a_n > 0$ (\forall) $n \in \mathbb{N}^*$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0$.

Conform criteriului raportului avem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

d) Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1 = \infty$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. apoi $f_1(x) - x = -\sin x$ (\forall) $x \in \mathbb{R}$ cum nu exista $\lim_{x \rightarrow \infty} (-\sin x)$, graficul functiei f_1 nu are asimptota spre $+\infty$.

e) Cum verificarea este facuta, ramane sa aratam ca $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$f_{(2n+1)}(x) = \int_0^x f_{2n}(t) dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^3}{3!} + (-1)^n x + (-1)^{n+1} \sin x.$$

$$f_{(2n+2)}(x) = \int_0^x f_{2n}(t) dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^4}{4!} + (-1)^n \frac{x^2}{2!} + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} \cos x$$

f) Aratam inductiv ca $0 \leq f_n(x) \leq 2 \frac{x^n}{n!}$ (\forall) $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$ at $n=1$ din $0 \leq f_0(t) \leq 2$ (\forall) $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ integrand

ca $0 \leq f_1(x) \leq 2x$. (\forall) $x > 0$ apoi din $0 \leq f_n(t) \leq 2 \frac{t^n}{n!}$ integrand $\Rightarrow 0 \leq f_{n+1}(x) \leq 2 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. (\forall) $x > 0$

g) din c) si f) \Rightarrow ca $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, (\forall) $x > 0$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^k f_n(x) = 0$ (\forall) $x > 0$

Fie $b_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Din f) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} b_n(x) = \cos x$. (\forall) $x > 0$. Deoarece functiile b_n si

\cos sunt functii impare, rezulta egalitatea si pentru $x \leq 0$

Asadar $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = \cos x$, (\forall) $x \in \mathbb{R}$.