

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

 Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro **Varianta044**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$.
- (4p) b) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.
- (4p) c) Să se calculeze partea reală a numărului complex $z = (1+i)^2 - (1-i)^2$.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,0)$, $B(0,5)$ și $C(-2,5)$.
- (2p) e) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ și $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
- (2p) f) Să se calculeze distanța dintre dreapta $x + 2y - 1 = 0$ și punctul $A(-2, 0)$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Dacă $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$, să se calculeze $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(10)$.
- (3p) b) Să se determine câte numere de forma \overline{abc} există, cu $a, b, c \in \{1, 2\}$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x} - 3 \cdot 2^{2x} - 4 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea \mathbf{Z}_4 ecuația $\hat{x}^4 = \hat{x}$.
- (3p) e) Să se determine probabilitatea ca un element n al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $\log_2 n \geq \frac{n-1}{2}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$.

- (3p) a) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se arate că $f(x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^2 f(t) dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricile $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ și multimea

$$M = \{M(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}.$$

- (4p) a) Să se verifice ca $E \in M$, $E^2 \in M$ și $E^3 \in M$.
- (4p) b) Să se arate că E este inversabilă și să se calculeze inversa sa.
- (2p) c) Să se arate că $M(a,b,c) = aI_3 + bE + cE^2$, $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $\det(M(a,b,c)) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $a + b + c \geq 0$, atunci $\det(M(a,b,c)) \geq 0$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $X \in M_3(\mathbf{R})$ și $X \cdot E = E \cdot X$, atunci $X \in M$.
- (2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$, există $a_n, b_n, c_n \in \mathbf{R}$, astfel încât $(M(a,b,c))^n = M(a_n, b_n, c_n)$ și $a_n + b_n + c_n = (a + b + c)^n$.
- (2p) h) Să se rezolve ecuația $X^{2007} = E$ în multimea $M_3(\mathbf{Z})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră integralele $I_0(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$ și $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$, unde $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se calculeze $I_0(x)$, $x \in [0, 1]$.
- (4p) b) Să se arate că $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$, $\forall t \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) c) Să se arate că $0 \leq I_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in [0, 1]$.
- (2p) d) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.
- (2p) e) Să se arate că $I_n(x) + I_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$.
- (2p) f) Să se arate că
- $$I_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x}{1} + (-1)^n I_0(x), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1].$$
- (2p) g) Să se arate că $\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \right)$, $\forall x \in [0, 1]$.

Varianta 044

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Subiectul I

a) 1. b) 10. c) 0. d) $A = 5$. e) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1$. f) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Subiectul II

1. a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$. b) $2^3 = 8$. c) $2^{2x} \in \{-1, 4\}$, $2^{2x} = 4 \Rightarrow x = 1$. d) $\hat{0}, \hat{1}$ verifica, $\hat{2}, \hat{3}$

nu verifica. e) $\log_2 n \geq \frac{n-1}{2}, \forall n \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow P = 1$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $y = 0$. b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 4)^2}$. c) $x^2 + 4 \geq 4$, $\frac{1}{x^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$. d) $f'(1) = \frac{-2}{25}$.

e) $\int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$.

Subiectul III

a) Avem $E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $E^3 = I^3$. Evident ca $E, E^2, E^3 \in M$.

b) Deoarece $E \cdot E^2 = E^2 \cdot E = I_3 \Rightarrow E$ inversabil ; $E^{-1} = E^2$.

c) Verificare. d) Calcul direct

e) Avem egalitatea: $a^2 + b^2 + c^2 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2]$.

Cum $a+b+c \geq 0 \Rightarrow (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 \geq 0$, obtinem $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$.

f) Fie $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$, din $XE = EX \Rightarrow a_1 = b_2 = c_3; a_2 = b_3 = c_1;$

$a_3 = b_1 = c_2$, deci $(\exists) a, b, c \in \mathbf{R}$ a.i. $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in M$.

g) Presupunem ca $(M(a, b, c))^n = M(a_n, b_n, c_n)$ si $a_n + b_n + c_n = (a + b + c)^n$

avem: $(M(a,b,c))^{1+n} =$
 Descarcat de pe site-ul ebaclauat.ro

$$= (M(a, b, c))^n \cdot M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ c_n & a_n & b_n \\ b_n & c_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_n a + b_n c + c_n b & a_n b + b_n a + c_n c & a_n c + b_n b + c_n a \\ a_n c + b_n b + c_n a & a_n a + b_n c + c_n b & a_n b + b_n a + c_n c \\ a_n b + b_n a + c_n c & a_n c + b_n b + c_n a & a_n a + b_n c + c_n b \end{pmatrix} = M(a_{n+1}; b_{n+1}; c_{n+1})$$

$$a_{n+1} = a_n a + b_n c + c_n b$$

$$\text{Unde } b_{n+1} = a_n b + b_n a + c_n c$$

$$c_{n+1} = a_n c + b_n b + c_n a$$

Adunand relatatile obtinem

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = (a_n + b_n + c_n)(a + b + c) = (a + b + c)^n \cdot (a + b + c) = (a + b + c)^{n+1}.$$

h) Avem $XE=X \cdot X^{2007} = X^{2007} \cdot X = EX$ din f) $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Conform punctului

g) Avem $X^{2007} = M(a_{2007}, b_{2007}, c_{2007})$, $a_{2007} + b_{2007} + c_{2007} = (a + b + c)^{2007}$, deci ecuatia devine $M(a_{2007}, b_{2007}, c_{2007}) = M(0,1,0) \Rightarrow a_{2007} = 0; b_{2007} = 1; c_{2007} = 0$;

Asadar $(a+b+c)^{2007} = 1 \Rightarrow \det X = 1$ deci $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ sau

$$\frac{1}{2}((a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 1 \text{ sau } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2$$

$a, b, c \in \mathbf{Z} \Rightarrow a = b, b - c = \pm 1; c - a = \pm 1$ sau $b = c$. $a - b = \pm 1$. $c - a = \pm 1$ sau $a = c$, $a - b = \pm 1$; $c - a = \pm 1$; sau $a = c, a - b = \pm 1; c - a = \pm 1$. Se tine cont de $a + b + c = 1$ si se obtin solutiile.

Subiectul IV

a) $I_0(X) = \ln(1+x)$. b) Inegalitatile sunt evidente ($1+t \geq 1$).

c) Prin integrarea inegalitatilor de la punctul b) se obtine conditia.

d) Din c) cu criteriul clestelui se obtin $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = 0$.

e) $I_n(x) + I_{n-1}(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}(t+1)}{1+t} dt = \frac{x^n}{n}, (\forall)x \in [0,1]$.

f) Tinand cont de punctul e) avem :

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x}{1} &= (I_n(x) + I_{n-1}(x)) - (I_{n-1}(x) + I_{n-2}(x)) + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} (I_1(n) + I_0(x)) = I_n(x) + (-1)^{n-1} I_0(x) \end{aligned}$$

g) Din f) $\Rightarrow I_0(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n I_n(x), (\forall)x \in [0,1]$.

Tinand cont de a) si d) se obtine concluzia.