

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

 Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro **Varianta043**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6}$.
- (4p) b) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$.
- (4p) c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $x - 2y + 1 = 0$ și $ax + 3y = 0$ sunt paralele.
- (4p) d) Să se calculeze $\cos(\hat{A})$ dacă laturile triunghiului ABC sunt $AB = 5$, $BC = 12$, $CA = 13$.
- (2p) e) Să se calculeze numărul de elemente ale mulțimii $M_2 \cup M_4$ dacă $M_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) f) Să se determine un punct pe cercul $x^2 + y^2 = 13$, care are ambele coordonate numere întregi.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se determine câte numere de trei cifre de forma $\overline{a0b}$ există, unde a și b sunt cifre.
- (3p) b) Să se calculeze valoarea sumei $\hat{1} + \hat{3} + \hat{5} + \dots + \hat{15}$ în grupul $(\mathbf{Z}_{16}, +)$.
- (3p) c) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze A^2 .
- (3p) d) Să se determine numărul funcțiilor injective $f: \{1,2\} \rightarrow \{1,2,3\}$.
- (3p) e) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^4 + 1$ la $g = X - 1$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
- (3p) a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se determine numărul soluțiilor ecuației $f(x) = 2$.
- (3p) e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

SUBIECTUL III (20p)

În inelul $\mathbf{Z}_4[X]$ se consideră submulțimile $U = \{f \in \mathbf{Z}_4[X] \mid \exists g \in \mathbf{Z}_4[X], \text{ astfel încât } f \cdot g = \hat{1}\}$
Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

și $N = \{f \in \mathbf{Z}_4[X] \mid \exists n \in \mathbf{N}^* \text{ astfel încât } f^n = \hat{0}\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $\hat{1} \in U$, $\hat{3} \in U$, $\hat{0} \in N$, $\hat{2} \in N$.
- (4p) b) Să se verifice că $\hat{2}X + \hat{1} \in U$ și $\hat{2}X + \hat{2} \in N$.
- (2p) c) Să se arate că $U \cap N = \emptyset$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $u, v \in N$, atunci $u + v \in N$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $u \in U$ și $g \in N$, atunci $u + g \in U$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $f \in U$, atunci termenul liber al polinomului f este $\hat{1}$ sau $\hat{3}$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $f \in N$, atunci toți coeficienții polinomului f sunt din mulțimea $\{\hat{0}, \hat{2}\}$.
- (2p) h) Să se arate că fiecare dintre mulțimile U și N conține cel puțin 2007 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{2^{1!}} + \frac{1}{2^{2!}} + \dots + \frac{1}{2^{n!}}$ și $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot 2^{n!}}$,
 $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se verifice că sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict crescător.
- (4p) b) Să se arate că sirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.
- (4p) c) Să se arate că sirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt mărginite.
- (2p) d) Să se arate că sirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt convergente și au aceeași limită.
- (2p) e) Notăm cu $a \in \mathbf{R}$ limita sirului $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$. Să se arate că numărul a este irațional.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2007}}{2^{n!}} = 0$.
- (2p) g) Să se arate că nu există polinoame nenule $f, g \in \mathbf{R}[X]$, cu proprietatea că

$$a_n = \frac{f(n)}{g(n)}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Varianta 043

Subiectul I Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

a) $\sqrt{3}$. b) 3. c) $-\frac{3}{2}$. d) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5}{13}$. e) 4. f) (2,3).

Subiectul II

1.a) 90. b) $\hat{0}$. c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. d) $A_3^2 = 6$. e) $r=2$.

2. a) $-\frac{\pi}{2}$. b) $\frac{1}{1+x^2}$; c) $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0, (\forall)x \in (0, \infty)$; d) nicio solutie Imf = $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

e) $\int_0^1 arctg x dx = [x arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

Subiectul III

a) $\hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}; \hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{1}, (\hat{0})^1 = \hat{0}, (\hat{2})^2 = \hat{0}$.

b) $(\hat{2}x + \hat{1})(\hat{2}x + \hat{1}) = \hat{1}; (\hat{2}x + \hat{2})^2 = \hat{0}$.

c) Fie $f \in U \cap N$. Din $f \in U \Rightarrow$ exista $g \in Z_4[X]$ astfel incat $f \cdot g = \hat{1}$.

Din $f \in N \Rightarrow$ exista $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ astfel incat $f^n = 0$.

Alegem n minim cu aceasta proprietate. Inmultind relatia $f \cdot g = \hat{1}$ cu f^{n-1} obtinem $\hat{0} = f^{n-1}$, ceea ce contrazice minimalitatea lui n.

d) $u^n = \hat{0}; v^m = \hat{0} \Rightarrow (u+v)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k \cdot u^k \cdot v^{m+n-k} = \hat{0}$ deoarece $k \geq n$ sau $m+n-k \geq m$.

e) Daca $v \in N$ si $v^n = \hat{0}$ atunci si $v^{2n+1} = 0$.

Avem $u^{2n+1} = u^{2n+1} + g^{2n+1} = (u+g)(u^{2n} - u^{2n-1}g + u^{2n-2}g^2 - \dots + g^{2n})$.

Daca $u \cdot g = \hat{1}$ atunci $u^{2n+1} \cdot g^{2n+1} = \hat{1} \Rightarrow (u+g)h = \hat{1}$, unde $h = (u^{2n} - u^{2n-1}g + \dots + g^{2n}) \cdot g^{2n+1}$.

f) $f \cdot g = \hat{1} \Rightarrow f(x)g(x) = \hat{1}, (\forall)x \in \mathbb{Z}_4 \Rightarrow f(\hat{0})g(\hat{0}) = \hat{1}, (\forall)x \in \mathbb{Z}_4 \Rightarrow f(\hat{0}) = g(\hat{0}) \in \{\hat{1}, \hat{3}\}$.

g) Facem inductie dupa gradul lui f. Daca grad f = 0 $\Rightarrow f = \hat{c} \stackrel{a}{\Rightarrow} \hat{c} \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$.

Polinomul $h(x) = \hat{a}_{n+1}x^{n+1}$ este nilpotent ($h^2 = \hat{0}$) si din d $\Rightarrow g = f - h \in N$ si

conform ipotezei de inductie coeficientii lui g sunt $\hat{0}$ si $\hat{2}$.

h) Definim $v_n = \hat{2}x^n$ si $u_n = \hat{1} + v_n, n \in \mathbb{N}^*$ si avem $v_n \in N, u_n \in U, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul IV

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{(n+1)!}} > 0$

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1)2^{(n+1)!}} - \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2^{(n+1)!}} + \frac{1}{(n+1)2^{(n+1)!}} = \\ &= \frac{n(n+2) - (n+1)2^{nn!}}{n(n+1)2^{(n+1)!}} < 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

c) $a_n < b_n \Rightarrow a_n, b_n \in [a_1, b_1] (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

d) Sirurile $(a_n)_n, (b_n)_n$, sunt monotone si marginite, deci convergente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = 0.$$

e) Daca prin absurd $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{p}{2}, p, q \in \mathbb{N}^*$ atunci $a_q < \frac{p}{q} < b_q$ sau

$$\frac{1}{2^{1!}} + \frac{1}{2^{2!}} + \dots + \frac{1}{2^{q!}} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2^{1!}} + \frac{1}{2^{2!}} + \dots + \frac{1}{2^{q!}} + \frac{1}{q \cdot q^{q!}}$$

Inmultim cu $q \cdot q^2$ si obtinem $A < B < A + 1, A, B \in M$, relatie care nu este posibila.

f) $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2007}}{2^{n!}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2007}}{2^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2007}}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2007 \cdot x^{2006}}{2^x \ln 2} = 0.$

g) Daca $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_{n-1} - a_n = \frac{f(n-1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{P(n)}{Q(n)}$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

Deci $P(n) = \frac{Q(n)}{2^{(n+1)!}} = 0 \Rightarrow$

$$P = 0 \Rightarrow \frac{1}{2^{(n+1)!}} = 0 \text{ (contradictie).}$$