

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**

 Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro **Varianta ....042**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(-1, -2, 3)$  la planul  $x + y + z - 4 = 0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la parabola  $y^2 = 6x$  dusă prin punctul  $P(6, 6)$ .
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $L(1, 2)$ ,  $M(2, 3)$  și  $P(0, 4)$ .
- (2p) e) Să se calculeze cosinusul unghiului dintre vectorii  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  și  $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$(1+i)^{10} = a + bi$$

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Dacă  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  și  $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ , să se arate că  $a = c$  și  $b = d$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbb{Z}_{10}$  să verifice relația  $\hat{5}\hat{x} = \hat{0}$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5x + 1$  are inversa  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , să se calculeze  $g(6)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x^2 + 7) = 3$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului  $f = X^4 - X^2 + 24$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4^x + x + 1$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f'(x)dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 10} dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) \mid XA = AX\}$ .

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- (4p) b) Să se calculeze matricele  $A^2$  și  $A^3$ .
- (4p) c) Să se arate că matricea  $A$  este inversabilă și să se calculeze inversa sa.
- (2p) d) Să se arate că, dacă  $U, V \in C(A)$ , atunci  $U \cdot V \in C(A)$ .
- (2p) e) Să se arate că, dacă  $X \in C(A)$ , atunci există  $a, b, c \in \mathbb{C}$  astfel încât  $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ .
- (2p) f) Să se arate că, dacă  $Y \in C(A)$  și  $Y^3 = O_3$ , atunci  $Y = O_3$ .
- (2p) g) Să se arate că, dacă  $Z \in C(A)$  și  $Z^{2007} = O_3$ , atunci  $Z = O_3$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$  și  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $f(x + 2\pi) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- (2p) d) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- (2p) e) Să se verifice că  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $\forall x \in [0, \pi]$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ .
- (2p) g) Să se arate că graficul funcției  $F$  nu are asimptotă către  $+\infty$ .

## Varianta 42

**Subiectul I.** Descarcat de pe site-ul [ebacalaureat.ro](http://ebacalaureat.ro)

- a)  $|\vec{v}| = \sqrt{13}$ .
- b)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .
- c) Ecuația tangentei este  $x - 2y + 6 = 0$ .
- d) Aria triunghiului  $LMP$  este  $S = \frac{3}{2}$ .
- e)  $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ .
- f)  $a = 0$ ,  $b = 32$ .

**Subiectul II.**

1.

- a) Se folosește faptul că  $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .
- b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ .
- c)  $g(6) = 1$ .
- d)  $x \in \{-1, 1\}$ .
- e)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$

2.

- a)  $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 + 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f'(x) dx = 4$ .
- c)  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4 \ln 4 + 1$ .
- e)  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 10} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{11}{10}$ .

**Subiectul III.**

- a)  $\det(A) = 1$ .
- b)  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $A^3 = I_3$ .

c) Avem  $A^3 = I_3$ , deci  $A^{-1} = A^2$ .

d) Considerăm  $U, V \in C(A)$ .  
Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro  
Avem:  $(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV)$ , deci  $UV \in C(A)$ .

e) Se arată prin calcul direct.

f) Considerăm  $Y \in C(A)$ , astfel încât  $Y^3 = O_3$ .

Din e) deducem că există  $a, b, c \in \mathbf{C}$ , astfel încât  $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ .

Deoarece  $Y^3 = O_3$ , obținem  $\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = 0 \\ 3(a^2c + b^2a + c^2b) = 0 \\ 3(a^2b + b^2c + c^2a) = 0 \end{cases}$ , de unde rezultă ușor

$$a = b = c = 0.$$

g) Avem  $3^7 = 2187$  și din  $Z^{2007} = O_3$  rezultă și  $Z^{2187} = O_3$ .

$$Z^{2187} = O_3 \Leftrightarrow (Z^{3^6})^3 = O_3 \stackrel{\text{f))}}{\Leftrightarrow} Z^{3^6} = O_3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Z^3 = O_3 \stackrel{\text{f))}}{\Leftrightarrow} Z = O_3.$$

#### Subiectul IV.

a) Deoarece  $2\pi$  este perioadă pentru funcția cosinus, este evidentă concluzia.

b) Considerăm sirurile  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $x_n = 2n\pi$ ,  $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{1}{4}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \frac{1}{3}$ , de unde rezultă că nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

c) Evident, deoarece  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .

d) Iese imediat, folosind punctul c).

e) Prin calcul direct.

f) Din  $f(t) \geq \frac{1}{4}$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$  rezultă  $\int_0^x f(t) dt \geq \frac{x}{4}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$ .

g) Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$ , graficul funcției  $F$  nu are asimptotă orizontală spre  $+\infty$ .

Din a) se obține  $F(x + 2\pi) = F(x) + F(2\pi)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$  și se arată că pentru  $a = \frac{F(2\pi)}{2\pi}$

funcția  $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $G(x) = F(x) - ax$  este periodică, de perioadă  $2\pi$  și fiind continuă, este mărginită. Obținem  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{G(x)}{x} + a \right) = a$ .

Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x)$ , iar ultima limită nu există (o funcție periodică și neconstantă nu are limită spre  $+\infty$ ), rezultă că graficul lui  $F$  nu are asimptotă spre  $+\infty$ .