

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

 Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro **Varianta041**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze partea reală a numărului complex $(1-i)^{20}$.
- (4p) b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât punctul $A(1, 0, m)$ să aparțină planului de ecuație $x + y + z - 3 = 0$.
- (4p) c) Să se afle aria totală a unui cub cu latura de 2.
- (4p) d) Să se calculeze $\cos \frac{7\pi}{3}$.
- (2p) e) Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $x - y = 0$ și elipsa de ecuație $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(-1, 1)$ și $B(2, -2)$ să aparțină dreptei $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se determine termenul din dezvoltarea $(a+1)^{12}$ care îl conține pe a^5 .
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $\frac{(n+1)!}{n!} = 30$, pentru $n \in \mathbf{N}$.
- (3p) d) Să se determine care este probabilitatea ca aruncând un zar să obținem una din rădăcinile ecuației $x^2 - 5x + 4 = 0$.
- (3p) e) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2007}$. Să se calculeze $(f \circ f)(1)$.

 2. Se consideră funcția $f : (e, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x > e$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow e^2} \frac{f(x) - f(e^2)}{x - e^2}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare.
- (3p) d) Să se determine multimea primitivelor funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Se consideră cunoscute formulele $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ și $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se arate că $(X - 1)f = X^5 - 1$.

- (4p) b) Să se arate că $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.

- (4p) c) Să se arate că rădăcinile polinomului f sunt $x_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$, unde $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- (2p) d) Să se demonstreze egalitatea $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = -1$.

- (2p) e) Să se deducă din relația anterioară că $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

- (2p) f) Să se arate că are loc egalitatea $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 1$.

- (2p) g) Să se arate că dacă $f_i \in \mathbf{C}[X]$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, satisfac relația

$f_1(X^5) + Xf_2(X^5) + X^2f_3(X^5) + X^3f_4(X^5) + X^4f_5(X^5) = f(X)f_5(X)$ atunci polinomul $X - 1$ divide polinomul f_i , pentru orice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(x_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ și

$x_n = \frac{c_1}{1^2} + \frac{c_2}{2^2} + \dots + \frac{c_n}{n^2}$, unde $c_k \in \{-1, 1\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se arate că $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq 2$.

- (4p) b) Să se arate că $\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) c) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.

- (2p) d) Să se arate că $\forall p \in \mathbf{N}^*$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \in [2^p, 2^{p+1})$, există A și B numere întregi impare, astfel încât $2^{2p} x_n = \frac{A}{B}$.

- (2p) e) Să se arate că pentru orice $n \geq 2$ numărul x_n nu este număr întreg.

- (2p) f) Să se arate că pentru $\forall n \in \mathbf{N}^*$, există $y_n, z_n \in [0, \infty)$, astfel încât $x_n = y_n - z_n$.

- (2p) g) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Varianta 41
Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Subiectul I

a) -2^{10} . b) 2. c) 24. d) $\frac{1}{2}$. e) 2 puncte. f) $a=1, b=0$.

Subiectul II

1. a) 7. b) $T_8 = C_{12}^7 a^5$. c) $n = 29$. d) $\frac{1}{3}$. e) 1.

2. a) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. b) $f'(e^2) = \frac{-1}{e^2}$.

c) $x > e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow 1 - \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, (\forall)x > e \Rightarrow f$ strict descrescatoare pe $(e, +\infty)$. d) $\int f(x) dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$. e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Subiectul III

a) Calcul direct. b) Calcul direct.

c) $f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}, f(x) = 0 \Rightarrow x^5 = 1, x \neq 1$.

$x_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}; x_k \neq 1 \Rightarrow k \neq 0$.

d) Din relatia $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$ obtinem :

$$\cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + i \left(\sin \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} \right) = -1 \Rightarrow$$

$$\cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} = -1.$$

e) Din d) rezultă $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

f) $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) = (-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)(-1-x_4) = f(-1) = 1$.

g) Inlocuind in relatia data pe X cu x_1, x_2, x_3, x_4 obtinem

$$f_1(1) + x_i f_2(1) + x_i^2 f_3(1) + x_i^3 f_4(1) = 0, 1 \leq i \leq 4,$$

care este un sistem liniar si omogen in necunoscutele

$$f_1(1), f_2(1), f_3(1), f_4(1)$$

cu determinantul Vandermonde $V(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$. Rezulta ca el admite numai solutia banala, $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = f_4(1) = 0$.

Subiectul IV

a) $(k-1)k < k^2 < k(k+1) \Leftrightarrow k^2 - k < k^2 + k$, evidentă.

b) Folosim $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ și aplicând-o la fiecare fractie a sumei obținem

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow (a_n)$ sir strict crescător.

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow (a_n) \text{ marginit}.$$

d) Din numerele $1, 2, \dots, 2^p, \dots, n$ singurul care se divide cu 2^p este 2^p . Amplificand în x_n cu 2^{2p} toate fracțiile au numărătorii pari în afara de fracția $\frac{2^{2p} \cdot c_{2^p}}{2^{2p}} = c_{2^p}$ care are număratorul ± 1 , impar. Rămân la numărători numere impare și numitorul comun B, impar.

e) Din punctul d) $\Rightarrow 2^{2p} \cdot x_n = \frac{A}{B}$ dacă $x_n \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{A}{B} \in \mathbf{Z}$ contradicție $\Rightarrow x_n \notin \mathbf{Z}$.

f) $x_n = \frac{c_1}{1^2} + \frac{c_2}{2^2} + \dots + \frac{c_n}{n^2}; c_k \in [-1, 1]$, y_n este suma termenilor pozitivi iar z_n este suma termenilor negativi $\Rightarrow x_n = y_n - z_n$.

g) $(y_n)_{n \geq 1}, (z_n)_{n \geq 1}$ sunt siruri strict crescătoare și marginite superioare de sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, care este marginit, conform punctului c) $\Rightarrow (y_n), (z_n)$ sunt convergente \Rightarrow sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.