

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro Varianta040

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy , se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, -3)$ și $C(6, 0)$.

- (4p) a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al dreptelor de ecuații $2x - y - 4 = 0$ și $x + 2y - 4 = 0$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12}$.
- (4p) c) Să se calculeze distanța de la punctul $A(1, 1)$ la dreapta de ecuație $3x + 4y + 8 = 0$.
- (4p) d) Să se determine modulul numărului complex $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctul $M(a, 1, b)$ să fie situat pe dreapta PQ , unde $P(0, 2, 3)$ și $Q(2, 3, 5)$.
- (2p) f) Să se determine coordonatele punctului D pentru care $ABCD$ este paralelogram.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze suma primelor 10 numere naturale nenule care sunt pătrate perfecte.
- (3p) b) Să se determine $n \in \mathbf{N}$ pentru care $2^n = 1024$.
- (3p) c) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$ sunt rădăcinile ecuației $x^3 + 1 = 0$.
- (3p) d) Să se determine numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 3 elemente.
- (3p) e) Să se arate că $x^2 - 4x + 5 > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) d) Să se determine aria cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 1$.
- (3p) e) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră sirul de numere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\begin{cases} f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ f_0 = 0, f_1 = 1 \end{cases}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze $\det(A)$.
- (4p) b) Să se calculeze A^2 .
- (4p) c) Să se arate că $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{C})$.
- (2p) d) Să se calculeze $\det(A^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) f) Să se demonstreze că $f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
și că $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că $\det(A + A^2 + \dots + A^n) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$,

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$ și $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- (4p) b) Să se arate că $\{x\} \geq \{x\}^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) = \sqrt{x - x^2}$, $\forall x \in [0, 1]$.
- (2p) d) Să se arate că $f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că f este continuă pe \mathbf{R} .
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx$.

Varianta 40

Subiectul I. Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

a) $\begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$.

b) 1.

c) Distanța de la punctul E la dreapta dată este egală cu 3.

d) $|z| = 1$.

e) $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 4 \end{cases}$.

Subiectul II.

1.

a) $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385$.

b) $n = 10$.

c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

d) 3 submulțimi cu două elemente.

e) Evident.

2.

a) $f(1) = e$.

b) $f'(x) = e^x(x+1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2e$

d) Aria căutată este $A = 1$.

e) Există un punct de inflexiune al graficului funcției f .

Subiectul III.

a) $\det(A) = -1$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Se arată prin calcul direct.

d) $\det(A^n) = (\det(A))^n = (-1)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

e) Se demonstrează prin inducție.

f) Din punctul e) obținem $\det(A^n) = \det \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{d)}{\Leftrightarrow}}{} f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$,
 Descarcat de pe siteul elbacalaureat.ro
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Din ipoteză avem că $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$

Înlocuind pe rând k cu fiecare din numerele $1, 2, \dots, n+1$ în relația de recurență din enunț și adunând egalitățile obținute, deducem: $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

g) Pentru $n=1$ obținem $\det(A) = -1 < 0$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, avem:

$$\det(A + A^2 + \dots + A^n) \stackrel{\text{o)}{=} \begin{vmatrix} f_2 + f_3 + \dots + f_{n+1} & f_1 + f_2 + \dots + f_n \\ f_1 + f_2 + \dots + f_n & f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} \end{vmatrix} \text{ și folosind punctul f)}$$

obținem $\det(A + A^2 + \dots + A^n) (-1)^{n+2} - 2f_{n-1} - f_n + 1 < 0$.

Subiectul IV.

a) $f(0) = 0$ și $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

b) $\{x\} \geq \{x\}^2 \Leftrightarrow \{x\} \cdot (\{x\} - 1) \leq 0$, adevărat, deoarece $\{x\} \in [0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Dacă $x \in [0, 1]$, atunci $\{x\} = x$, aşadar $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

d) Se folosește faptul că $\forall x \in \mathbb{R}$, avem: $\{x+1\} = \{x\}$.

e) Deoarece f este continuă pe $[0, 1]$, este periodică de perioadă 1, iar $f(0) = f(1)$, rezultă că f este continuă pe \mathbb{R} .

f) $\int_0^1 f(x) dx = A(\Gamma_f)$, unde Γ_f este subgraficul funcției f pe intervalul $[0, 1]$, deci $A(\Gamma_f)$ este jumătate din aria cercului de ecuație $y^2 = x - x^2$.

Obținem $\int_0^1 f(x) dx = A(\Gamma_f) = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$.

g) Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, efectuând schimbarea de variabilă $x - k = y$, obținem:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \frac{\pi}{8} \text{ și apoi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx}{n} = \frac{\pi}{8}$$