

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**

 Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro **Varianta ....039**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\frac{1+i}{2+i}$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(3,2,1)$  la planul  $x+2y+3z-4=0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la parabola  $y^2 = 4x$  în punctul  $P(4,4)$ .
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $L(1,1)$ ,  $M(2,2)$  și  $N(-3,3)$ .
- (2p) e) Să se determine produsul scalar al vectorilor  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  și  $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ .
- (2p) f) Să se determine  $a,b \in \mathbb{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe  $(\cos 6 + i \cdot \sin 6)^{10} = a + bi$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f = X^3 + 1$  la polinomul  $g = X^2 + X + 1$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_{12}$  să verifice relația  $\hat{x}^2 = \hat{0}$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x + 7$ , are inversa  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , să se calculeze  $g(10)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația  $2^{x+1} + 2^x = 3$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului  $f = X^3 - 3X + 1$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2 \sin x + 3e^x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe intervalul  $(0, \infty)$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $M$  formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane, fiecare matrice din  $M$  având numai elemente *distincte* din mulțimea  $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M$  și că  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \notin M$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ .
- (4p) c) Să se găsească o matrice  $A \in M$ , astfel încât  $\det(A) \neq 0$ .
- (2p) d) Să se arate că, dacă  $B \in M$  este o matrice inversabilă, atunci  $B^{-1} \notin M$ .
- (2p) e) Să se arate că dacă  $D \in M$ , atunci  $\text{rang}(D) \in \{2, 3\}$ .
- (2p) f) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $M$ .
- (2p) g) Să se arate că, mulțimea  $M$  conține cel puțin 18 matrice cu determinantul egal cu 0.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră sirurile  $(a_n)_{n \geq 3}$  și  $(b_n)_{n \geq 3}$ , definite prin

$$a_n = \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[n-1]{n-1 + \sqrt[n]{n}}}}, \quad b_n = \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[n-1]{n-1 + \sqrt[n]{n+2}}}},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $a_n < b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ .
- (4p) b) Să se arate că  $b_3 < 2$ .
- (4p) c) Să se arate că  $a_4 > 1,9$ .
- (2p) d) Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că  $2^{n+1} > n+3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- (2p) e) Să se arate că sirul  $(a_n)_{n \geq 3}$  este strict crescător și sirul  $(b_n)_{n \geq 3}$  este strict descrescător.
- (2p) f) Să se arate că sirurile  $(a_n)_{n \geq 3}$  și  $(b_n)_{n \geq 3}$  sunt convergente.
- (2p) g) Să se arate că sirurile  $(a_n)_{n \geq 3}$  și  $(b_n)_{n \geq 3}$  au aceeași limită și limita lor este un număr din intervalul  $(1,9; 2)$ .

### Varianta 039

#### Subiectul I

Descarcat de pe site-ul [ebacalaureat.ro](http://ebacalaureat.ro)

- a)  $\sqrt{\frac{2}{5}}$ . b)  $\frac{6}{\sqrt{14}}$ . c)  $2y=x+4$ . d) 3. e) 0 . f)  $a=\cos 60^\circ$ ,  $b=\sin 60^\circ$ .

#### Subiectul II

1. a) câtul  $x-1$ , restul 2. b)  $\frac{1}{6}$ . c) 1. d) 0. e) -3.

2. a)  $2\cos x + 3e^x$ . b)  $3e-1-2\cos 1$ . c)  $f''(x)>0, \forall x \in (0, \infty)$  d)  $2\cos 1 + 3e$ . e)  $\frac{\ln 2}{4}$ .

#### Subiectul III

- a) Prima matrice are numai elemente distincte din multimea  $\{1, 2, \dots, 9\}$ , deci aparține lui M, iar a doua are și elemente egale, deci nu aparține lui M.

b) determinantul este egal cu 0. c)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \det(A) = -24 \neq 0$

d) Dacă  $B \in M$  și  $B^{-1} \in M$ , atunci  $BB^{-1}=I_3$ . Dar  $B$  și  $B^{-1}$  are numai elemente strict pozitive, deci  $B B^{-1}$  va avea numai elemente strict pozitive. Deci  $B B^{-1} \neq I_3$  și de aici rezulta că  $B^{-1} \notin M$ .

e) Din b) și c) rezultă că mulțimea M conține matrice de rangul 2 și 3. Se arată că M nu conține matrice de rangul 1 deoarece ar avea toate liniile (coloanele) proporcionale.

f)  $P_9=9!$ .

g) Matricea de la punctul b) are determinantul nul, schimbând liniile între ele obținem 6 matrice cu determinantul nul. Pentru fiecare matrice astfel obținută schimbăm coloanele între ele și obținem pentru fiecare matrice alte 6 matrice cu determinantul nul. Rezultă în total 36 matrice cu determinantul nul.

#### Subiectul IV

- a) Relația  $a_n < b_n$  este echivalentă cu  $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+2}$  care este evident adevărată.

b)  $a_2 = \sqrt{2}$  și  $b_2 = \sqrt{2+2} = 2$

c)  $a_4 > 1,9$  este echivalentă cu  $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{4} > 1,9$  sau  $2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt{2}} > 3,61$  sau

$3 + \sqrt{2} > 4,173281$  sau  $\sqrt{2} > 1,173281$  care este evidentă.

d) Pentru  $n=2$  obținem  $8 > 5$ , adevărată. Presupunând că  $2^{n+1} > n+3$  adevărată, avem de arătat că  $2^{n+2} > n+4$ .

Avem  $2^{n+2} > 2(n+3) > n+4$ , deci inegalitatea este adevărată oricare ar fi  $n \geq 2$

- e) Relația  $a_n < a_{n+1}$  este echivalentă cu  $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n+1]{n+1}$  care este adevărată.

Relația  $b_n > b_{n+1}$  este echivalentă cu  $\sqrt[n]{n+2} < \sqrt[n+1]{n+3}$  sau  $2 > \sqrt[n+1]{n+3}$  sau  $2^{n+1} > n+3$ , demonstrată la punctul anterior.

f) Din  $a_2 \leq a_3 < b_3 \leq b_2$  rezultă că sirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt mărginite și monotone, deci convergente.

g) Avem  $0 < b_n - a_n < \frac{\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+2} + \sqrt[n]{n}}, \forall n \geq 2$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , obținem  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  deci,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$  și  $a \in (1,9;2)$ .