EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro ***Varianta ….038***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine conjugatul numărului complex $z = i^{10} + i^{11}$.

(4p) **b)** Să se determine valorile lui $a \in \mathbf{R}$ din egalitatea de numere complexe $1 + (a \cdot i)^2 = 0$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin 2\pi + \sin 4\pi$.

(4p) **d)** Să se calculeze $\sin 2\pi \cdot \sin 4\pi$.

(2p) **e)** Să se determine $c, d \in \mathbf{R}$ știind că punctele $A(c,1), B(2,d)$ sunt situate pe dreapta de ecuație $2x - y - 3 = 0$.

(2p) **f)** Să se dea un exemplu de punct $M(a,b)$ situat pe parabola de ecuație $y^2 = 4x$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Știind că $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 6$,să se arate că $b - a \in \mathbf{N}$.

(3p) **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$.

(3p) **c)** Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ să se arate că $\det A = \det B$.

(3p) **d)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x$, să se calculeze $f(f(1))$.

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de mulțime care are exact 8 submulțimi .

2.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

(3p) **b)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$, să se calculeze $f'(0)$.

(3p) **c)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-1)^2$, să se arate că funcția f are un singur punct de extrem local .

(3p) **d)** Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$, să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de funcție continuă $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ pentru care $\int_0^1 f(x)\,dx < 1$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

(4p) **a)** Să se determine $x, y \in \mathbf{R}$ astfel ca $A = xI_2 + yU$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei U .

(4p) **c)** Să se calculeze U^2 şi U^3.

(2p) **d)** Să se calculeze U^{2007}.

(2p) **e)** Să se arate că $A^n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} I_2 + \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2} U$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $X \in M_2(\mathbf{R})$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, atunci există $u, v \in \mathbf{R}$ astfel ca $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

(2p) **g)** Să se rezolve în $M_2(\mathbf{R})$ ecuaţia $X^{2007} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) \cos nx \, dx$,

$b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ şi funcţiile $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, $g : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} x^2 - x$,

$g(x) = f(x) \cdot ctg \frac{x}{2}$, $\forall x \in (0, \pi]$ şi $g(0) = -2$.

(4p) **a)** Să se calculeze a_0.

(4p) **b)** Să se arate că $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se arate că $b_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) \sum_{k=1}^{n} \cos kx dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducţiei matematice şi formula $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} \left(\sin nx ctg \frac{x}{2} + \cos nx - 1 \right), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}.$$

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $h : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ este o funcţie derivabilă şi cu derivata continuă, atunci avem: $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\pi} h(x) \cos nx \, dx = \lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\pi} h(x) \sin nx \, dx = 0$.

(2p) **f)** Să se arate că funcţia g este derivabilă şi cu derivata continuă pe intervalul $[0, \pi]$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Varianta 038

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Subiectul I

a) $-1+i$. b) -1 si 1. c) 0. d) 0. e) $c=2; d=1$. f) $M(1;2)$.

Subiectul II

1. a) $b-a=1$. b) 0. c) $\det(A)=\det(B)=-2$. d) 0. e) $\{1.2.3\}$.
2. a) 0.b) $\ln 2$. c) $x=1$. d) $f''(x)>0, \forall x\in \mathbf{R}$. e) $f(x)=x$.

Subiectul III

$a)\ x=a; y=b.$

$b)\ \det(U)=-1, rang U=2.$

$c)\ U^2=I_2, U^3=U.$

$d)\ U^{2007}=\left(U^2\right)^{1003}\cdot U=I_2^{1003}\cdot U=U.$

e) Deoarece $(aI_2)\cdot(bU)=(bU)\cdot(aI_2)$ avem.

$A^n=C_n^0a^nI_2+C_n^1a^{n-1}bU+C_n^2a^{n-2}b^2U^2+...+C_n^nb^nU^n, (\forall)n\in \mathbf{N}^*.$

Avem $U^{2k}=I_2$ si $U^{2k+1}=U$.

Asadar :

$A^n=(C_n^0a^n+C_n^2a^{n-2}b^2+...)\cdot I_2+(C_n^1a^{n-i}b+C_n^3a^{n-3}b^3+...)\cdot U=$

$=\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}I_2+\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}U, (\forall)n\in \mathbf{N}^*.$

f) Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$.

Din $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y & 2x+t \\ z+2t & 2z+t\end{pmatrix}$.

Asadar $x=t$ si $y=z$. Deci $\Rightarrow u,v\in \mathbf{R}$ astfel ca $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u\end{pmatrix}$.

g) Deoarece $X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}=X\cdot X^{2007}=X^{2007}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}X$ din f) $\Rightarrow \exists\, u,v\in \mathbf{R}$ astfel ca $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u\end{pmatrix}$.

Din e) $X^{2007}=\begin{pmatrix} \dfrac{(u+v)^{2007}+(u-v)^{2007}}{2} & \dfrac{(u+v)^{2007}-(u-v)^{2007}}{2} \\ \dfrac{(u+v)^{2007}-(u-v)^{2007}}{2} & \dfrac{(u+v)^{2007}+(u-v)^{2007}}{2}\end{pmatrix}$.

Obtinem sistemul : $\begin{cases}(u+v)^{2007}+(u-v)^{2007}=2 \\ (u+v)^{2007}-(u-v)^{2007}=4\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}(u+v)^{2007}=3 \\ (u-v)^{2007}=-1.\end{cases}$

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Deci $\begin{cases} u+v=\sqrt[2007]{3} \\ u-v=-1. \end{cases}$

Deducem ca solutia ecuatiei este $X=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt[2007]{3}-1}{2} & \frac{\sqrt[2007]{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt[2007]{3}+1}{2} & \frac{\sqrt[2007]{3}-1}{2} \end{pmatrix}$.

Subiectul IV

a) $a_0=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2\pi}x^2-x\right)dx=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi^2}{3}$.

b) Se utilizeaza formula de integrare prin parti.

c) Conform punctului b) avem:

$b_n=a_1+a_2+...+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2\pi}x^2-x\right)\sum_{k=1}^{n}\cos kxdx,(\forall)n\in\mathbf{N}^*;$

d) Avem $2\sin\frac{x}{2}\cos x=\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2};\ 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x=\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}.....$

$2\sin\frac{x}{2}\cos nx=\sin\left(\frac{x}{2}+nx\right)-\sin\left(nx-\frac{x}{2}\right)$.

Deducem ca

$\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)=sinnx\cos\frac{x}{2}+\cos nx\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}$.

Obtinem $\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2}\left(\sin nxctg\frac{x}{2}+\cos nx-1\right),(\forall)n\in\mathbf{N}^*,(\forall)\,x\in\mathbf{R}\setminus 2\pi\,\mathbf{Z};$

e) $\int_0^\pi h(x)\cos nxdxx=\int_0^\pi h(x)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx=\frac{1}{n}\int_0^\pi h'(x)\sin nxdx.$

Avem

$\left|\frac{1}{n}\int_0^\pi h'(x)\sin nxdx\right|\le\frac{1}{n}\int_0^\pi|h'(x)|dx\le\frac{1}{n}\int_0^\pi Mdx=\frac{M\pi}{n},(\forall)n\in\mathbf{N}^*,$ unde $M=\sup_{x\in[0,\pi]}|h'(x)|$.

Obtinem $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi h(x)\cos nxdx=0.$ Analog se arata ca $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi h(x)\sin nx=0;$

f) Avem $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2\pi}x^2-x\right)\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}}{x\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\pi};$

g) Din c) si d) $\Rightarrow b_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^\pi g(x)\sin nxdx+\int_0^\pi f(x)\cos nxdx-\frac{1}{2}a_0\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\int_0^\pi g(x)\sin nxdx+\int_0^\pi f(x)\cos nxdx+\frac{\pi^2}{6}\right),(\forall)n\in\mathbf{N}^*.$

Utilizand f) si e) obtinem $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{\pi^2}{6}$.