

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

 Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro **Varianta037**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

 În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$ se consideră punctele

$$O(0, 0, 0), A(0, 0, 2), B(3, 0, 0), C(3, 4, 0).$$

- (4p) a) Să se calculeze aria triunghiului OBC .
- (4p) b) Să se calculeze volumul tetraedrului $OABC$.
- (4p) c) Să se determine semnul expresiei $E = \cos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (4p) d) Să se determine lungimea ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic cu catetele de lungime 5 și 12.
- (2p) e) Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2 = 4x$ în punctul $A(1, 2)$.
- (2p) f) Să se rezolve în multimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -1$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se rezolve ecuația $2 \cdot \log_9 x - \log_9 x - 1 = 0$, $x > 0$.
- (3p) b) Să se calculeze $\frac{C_7^3}{C_7^4}$.
- (3p) c) Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0$ să se calculeze expresia: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 1)^2$.
- (3p) d) Să se afle probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_4$, să fie o soluție a ecuației $\hat{2}\hat{x}^2 + \hat{2}\hat{x} = \hat{0}$.
- (3p) e) Se consideră propoziția: „ $\mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{Z}_4$ ”.

Să se stabilească valoarea de adevăr a acestei propoziții, justificând răspunsul.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R} - \{-1\}$.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru $n \in \mathbb{Z}$, se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G = \{A(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

- (4p) a) Să se demonstreze că $\forall n, p \in \mathbb{Z}, A(n) \cdot A(p) = A(n+p+1)$.
- (4p) b) Să se demonstreze că $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{Z}, (A(t))^k = A(k \cdot t + k - 1)$.
- (4p) c) Să se calculeze $(A(0))^{2007}$.
- (2p) d) Să se verifice că $A(-1) \cdot A(k) = A(k) \cdot A(-1) = A(k), \forall k \in \mathbb{Z}$.
- (2p) e) Să se demonstreze că toate matricele din mulțimea G au determinantul egal cu 0 și rangul egal cu 1.
- (2p) f) Să se demonstreze că (G, \cdot) este grup comutativ.
- (2p) g) Dacă mulțimea $N \neq \{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului (G, \cdot) , să se demonstreze că N are cel puțin 2007 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x, g, h : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}}, h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $\forall x \geq 1, g'(x) = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$ și $h'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$.
- (4p) b) Să se demonstreze că $\forall x \geq 1, g(x) \leq 0 \leq h(x)$.
- (4p) c) Pentru $t > 1$, aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[1, t]$, să se demonstreze că există $c(t) \in (1, t)$ astfel încât $\frac{1}{c(t)} = \frac{\ln t}{t-1}$.
- (2p) d) Pentru $t > 1$, să se demonstreze că $\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}$.
- (2p) e) Pentru $t > 1$, să se demonstreze că $\sqrt{t} < c(t) < \frac{t+1}{2}$.
- (2p) f) Să se demonstreze că nu există un polinom $P \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $c(x) = P(x), \forall x > 1$.
- (2p) g) Să se demonstreze că $1,7 < \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{t^2 - 1}{\ln t} dt < 1,9$.

Varianta 37

Subiectul I. Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

- a) $S_{OBC} = 6$.
- b) $V_{OABC} = 4$.
- c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$.
- d) 13.
- e) Ecuatia tangentei in A la parabolă este $y = x + 1$.
- f) $z \in \{-i, i\}$.

Subiectul II.

1.

- a) $x \in \left\{ \frac{1}{3}, 9 \right\}$.
- b) 1.
- c) Suma căutată este egală cu 0.
- d) Probabilitatea căutată este $p = 1$.
- e) Propoziția este falsă.

2.

- a) $f(0) = 0$.
- b) $f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- c) $x \in \left\{ -\frac{3}{2}, 0 \right\}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.
- e) $\int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2}$.

Subiectul III.

- a) Calcul direct.
- b) Se demonstrează prin inducție, folosind punctul a).
- c) Pentru $t = 0$ și $k = 2007$, din b) obținem $(A(0))^{2007} = A(2006)$.
- d) Se folosește punctul a).
- e) Evident.
- f) Folosind subpunctele anterioare, se verifică ușor axiomele grupului.

g) Dacă mulțimea $N \neq \{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului (G, \cdot) , atunci există $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$, astfel încât $A(n) \in N$.
Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro
 Prin inducție se demonstrează că $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $(A(n))^k \in N$.

Deoarece puterile naturale nenule ale matricei $A(n)$ sunt elemente distincte două câte două ale lui N , mulțimea N este infinită.

Subiectul IV.

a) $g'(x) = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$, $h'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$, $\forall x \geq 1$.

b) $\forall x \geq 1$, $g'(x) \leq 0 \leq h'(x)$, adică funcția g e strict descrescătoare pe $[1, \infty)$ și funcția h e strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deci $\forall x \geq 1$, $g(x) \leq g(1) = 0 = h(1) \leq h(x)$.

c) Pentru $t > 1$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[1, t]$.

Din teorema lui Lagrange pentru funcția f ,

$$\exists c(t) \in (1, t), \text{ astfel ca } \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = f'(c(t)) \Leftrightarrow \frac{1}{c(t)} = \frac{\ln t}{t - 1}.$$

d) Pentru $t > 1$, din punctul **b**), avem că $g(t) < 0 < h(t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}} < 0 < \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} \Leftrightarrow \frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t < \frac{t-1}{\sqrt{t}}.$$

e) Din punctul **c**), avem că pentru $t > 1$, $\ln t = \frac{t-1}{c(t)}$ și înlocuind în **d**) obținem

concluzia.

f) Presupunem contrariul, deci că există un polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $\forall x > 1$, $c(x) = P(x)$.

Din punctul **e**) rezultă că $\forall x > 1$, $\frac{\sqrt{x}}{x^2} < \frac{P(x)}{x^2} < \frac{x+1}{2x^2}$, de unde deducem că $\text{grad}(P) \leq 1$, aşadar există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $P(X) = aX + b$.

Obținem $c(x) = \frac{x-1}{\ln x} = ax + b$, $\forall x > 1$, deci $c'(x) = a$, $\forall x > 1$, fals.

g) Înlocuind t cu t^2 în inegalitatea din stânga dedusă la punctul **e**) și integrând,

deducem: $1,7 < \frac{7}{4} \leq \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{t^2 - 1}{\ln t} dt$ (1)

Înmulțind cu $t+1 > 0$ inegalitatea din dreapta de la punctul **e**), și integrând,

deducem: $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{t^2 - 1}{\ln t} dt \leq \frac{91}{48} < 1,9$ (2)

Din (1) și (2) rezultă concluzia.