

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta036***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $z = \sqrt{7} + i\sqrt{2}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,3,5)$ la planul $x + 3y + 5z + 7 = 0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2 + 5y^2 = 6$ în punctul $P(1,1)$.
- (4p) d) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j}$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$, și $C(4, 4)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^3 = a + bi$$

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze $\sqrt{0,999}$ cu două zecimale exacte.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $3^n + 4^n > 5^n$.
- (3p) c) Să se calculeze suma $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}$.
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 3) = \log_2(2x^2 + x + 1)$.
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - \cos x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f'(x)}{2 + f(x)} dx$.

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

Varianta 036

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_3)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \mid \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_3 \right\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ și $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in G$
- (4p) b) Să se arate că dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_3$ și $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $A \cdot B \in G$
- (2p) d) Să se determine numărul elementelor mulțimii G .
- (2p) e) Să se arate că dacă $A \in G$ și $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$ astfel încât $A \cdot B = I_2$.
- (2p) f) Să se arate că operațiile de adunare și înmulțire a matricelor determină pe mulțimea G o structură de corp.
- (2p) g) Să se dea un exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2006}$ și

$$F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (4p) b) Să se verifice că $(x-1)f(x) = x^{2007} - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$
- (4p) c) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$
- (2p) e) Să se arate că funcția F este bijectivă

Notăm cu $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ inversa funcției F și cu $a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2007}$.

- (2p) f) Să se arate că $\int_0^a g(x) dx = a - \frac{2007}{2008}$.
- (4p) g) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$.

Varianta 36

Subiectul I.

- a) $|z| = 3$.
- b) $\frac{6\sqrt{35}}{5}$.
- c) Ecuația tangentei este $x + 5y - 6 = 0$
- d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.
- e) $S_{ABC} = \frac{27}{2}$.
- f) $a = 0$ și $b = 1$.

Subiectul II.

1.

- a) $\sqrt{0,999} \approx 0,99$.
- b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{2}{5}$.
- c) 1024.
- d) $x \in \{-2, 1\}$.
- e) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

2.

- a) $f'(x) = 2 + \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- b) $\int_0^1 f(x) dx = 1 - \sin 1$.
- c) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 + \sin 1$.
- e) $\int_0^1 \frac{f'(x)}{2 + f(x)} dx = \ln(4 - \cos 1)$.

Subiectul III.

a) Evident.

- b) Dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_3$, atunci $\hat{x}^2, \hat{y}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$.
 $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$, rezultă $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \hat{0}$, de unde obținem $\hat{x} = \hat{0}$ și $\hat{y} = \hat{0}$.
- c) Se arată prin calcul direct.
- d) Numărul elementelor mulțimii G este egal cu $3^2 = 9$.

e) Dacă $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \in G$, obținem $B = A^{-1} = (\hat{a}^2 - \hat{2}\hat{b}^2)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{2}\hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \in G$.

f) Se verifică ușor axiomele corpului, folosind și punctele e) și e).

g) Considerăm mulțimea cu 25 de elemente $K = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \mid \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_5 \right\}$.

Atunci, $(K, +, \cdot)$ este corpul căutat.

Subiectul IV.

a) $f(1) = 2007$.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Evident, folosind monotonia funcției putere.

d) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = f(x) \stackrel{e)}{>} 0$.

e) Din d) rezultă că F este strict crescătoare, deci injectivă.

Obținem $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2007}}{2007}$, de unde $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ și

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$ de unde rezultă ușor că F este surjectivă, deci bijectivă.

f) Făcând schimbarea de variabilă $g(x) = y$ se obține concluzia.

g) Deoarece funcția $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este strict crescătoare și bijectivă rezultă că și

$F^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este strict crescătoare și bijectivă, având $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F^{-1}(x) = +\infty$

Mai mult, $g(x) = y \Leftrightarrow x = F(y)$. Obținem: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{F(y)} \stackrel{\infty}{\underset{L'H}{=}} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{f(y)} = 0$.