

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....035***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze în mulțimea numerelor complexe numărul  $(1+2i)^2 - (1-2i)^2$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12}$ .
- (4p) c) Să se determine  $a \geq 0$  dacă vectorul  $\vec{v} = 4\vec{i} + a\vec{j}$  are modulul egal cu 8.
- (4p) d) Să se calculeze lungimea înălțimii din  $B$  a triunghiului  $ABC$  de laturi  $AB=6$ ,  $BC=8$ ,  $CA=10$ .
- (2p) e) Să se determine ecuația planului ce trece prin punctul  $A(2, 1, 3)$  și este paralel cu planul  $x - y + z = 2$ .
- (2p) f) Să se scrie ecuația tangentei la cercul  $x^2 + y^2 = 2$  în punctul  $T(1, 1)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Să se determine numărul soluțiilor întregi ale inecuației  $x^2 - 5x + 2 \leq 0$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{3} \cdot \hat{4} + \hat{5} \cdot \hat{6}$  în inelul  $\mathbf{Z}_7$ .
- (3p) c) Să se arate că numărul  $\log_2 8 + \log_3 \sqrt{27}$  este rațional.
- (3p) d) Să se determine câte numere de 3 cifre distințe se pot forma cu cifre din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element al inelului  $\mathbf{Z}_5$  să fie soluție a ecuației  $\hat{x}^4 = \hat{1}$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = xe^{-x}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) c) Să se arate că  $e^x \geq ex$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

și mulțimea  $S = \{A \in M_3(\mathbf{C}) \mid AX = XA, \forall X \in M_3(\mathbf{C})\}$ .

- (4p) a) Să se arate că  $I_3 \in S$
- (4p) b) Să se arate că  $\text{rang}(E_i) = 1$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ .
- (4p) c) Să se arate că dacă  $A \in M_3(\mathbf{C})$  și  $AE_i = E_i A$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ , atunci există  $a \in \mathbf{C}$ , astfel încât  $A = aI_3$ .
- (2p) d) Să se arate că  $S = \{aI_3 \mid a \in \mathbf{C}\}$ .
- (2p) e) Să se arate că  $(S, +, \cdot)$  este inel, unde operațiile „+” și „·” sunt cele uzuale.
- (2p) f) Să se arate că funcția  $f : \mathbf{C} \rightarrow S$ ,  $f(a) = aI_3$  este bijectivă.
- (2p) g) Să se arate că nicio funcție  $g : M_3(\mathbf{R}) \rightarrow M_3(\mathbf{C})$ , care verifică  $g(A \cdot B) = g(A) \cdot g(B)$   $\forall A, B \in M_3(\mathbf{R})$  nu este bijectivă.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , definite prin  $f_0(x) = x - \sin x$  și

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $f_1(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$ ,  $\forall x \in [0, \infty)$ .
  - (4p) b) Să se arate că funcția  $f_1$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
  - (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că:
- $$f_{2n-1}(x) = (-1)^{n-1} \left( \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in [0, \infty).$$
- (2p) d) Să se arate că  $f_n(x) > 0$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .
  - (2p) e) Să se arate că:
- $$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in (0, \infty).$$
- (2p) f) Să se arate că:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) = \cos x$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
  - (2p) g) Să se arate că  $\cos 1 \notin \mathbf{Q}$ .

### Varianta 035

**Subiectul I**

- a) 8i. b) 1. c)  $4\sqrt{3}$ . d) 4,8. e)  $x-y+z = 4$ . f)  $x+y = 2$ .

**Subiectul II**

1. a) 4. b)  $\hat{2}$ . c)  $\frac{9}{2}$ . d)  $A_4^3 = 24$ . e)  $\frac{4}{5}$ .
2. a) 0. b)  $(1-x)e^{-x}$ . c)  $e^x \geq ex$ . d)  $x = 2$ , singurul punct de inflexiune. e)  $\frac{e-2}{e}$ .

**Subiectul III**

a) Avem  $I_3 \cdot X = X \cdot I_3$ ,  $(\forall) X \in M_3(\mathbf{C})$ , deci  $I_3 \in S$ .

b) Toti minorii de ordinal doi ai matricelor  $E_i$ ,  $i \in \{1,2,3\}$  sunt nuli, deci  $\text{rang}(E_i) = 1$ ,  $\forall i \in \{1,2,3\}$ .

c) Fie  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$ . Din  $A \cdot E_i = E_i \cdot A$ ,  $(\forall) i \in \{1,2,3\}$  obtinem :

$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$  si  $a_1 = b_2 = c_3$ . Deducem ca exista  $a \in \mathbf{C}$  astfel incat

$$A = aI_3.$$

d) Fie  $A \in S$ . Rezulta ca  $A \cdot X = X \cdot A$ ,  $(\forall) X \in M_3(\mathbf{C})$ . In particular  $A \cdot E_i = E_i \cdot A$ ,  $(\forall) i \in \{1,2,3\}$ . Din c)  $\Rightarrow \exists a \in \mathbf{C}$  astfel incat  $A = aI_3$ , deci  $S \subset \{aI_3 | a \in \mathbf{C}\}$ .

Cum  $(aI_3)X = X(aI_3)$ ,  $(\forall) X \in M_3(\mathbf{C})$  avem  $\{aI_3 | a \in \mathbf{C}\} \subset S$ . Asadar  $S = \{aI_3 | a \in \mathbf{C}\}$ .

e) Se verifica axiomele inelului.

f) Fie  $a, b \in \mathbf{C}$  arbitrar alese astfel incat  $f(a) = f(b)$ . Obtinem  $aI_3 = bI_3$ , deci  $a = b$ . Deducem ca functia  $f$  este injectiva. Surjectivitatea functiei  $f$  este evidentă.

g) Presupunem ca functia  $g$  este bijectivă  $\Rightarrow \exists X, Y \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$  astfel incat  $g(X) = O_3$  si  $g(Y) = I_3$ . Alegem  $A = X$  si  $B = O_3 \Rightarrow g(O_3) = O_3$ . Alegem  $A = Y$  si  $B = I_3 \Rightarrow g(I_3) = I_3$ . Fie  $M = \{A \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R}) | AX = XA, (\forall) X \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})\}$ . Aratam ca  $g(M) = S$ .

Daca  $A \in M$  avem  $AX = XA$ . Rezulta ca  $g(A) \cdot g(X) = g(X) \cdot g(A)$  si cum  $g$  este bijectiva  $\Rightarrow g(A) \in S$ . Din  $B \in S \Rightarrow \exists A \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$  astfel incat  $g(A) = B$ . Avem  $g(A) \cdot Y = g(A) \cdot g(X) = Y \cdot g(A) = g(X) \cdot g(A)$  sau  $g(AX) = g(XA)$  sau  $AX = XA$ , deci  $A \in M$ .

Fie functia  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $f(b) = a$  daca  $g(bI_n) = aI_n$ . Functia  $f$  este bijectiva si avem  $f(xy) = f(x)f(y)$ . Fie  $x \in \mathbf{R}$  cu proprietatea  $f(x) = i$ . Atunci  $f(x^4) = i^4 = 1 = f(1)$ , deci  $x^4 = 1$  sau  $x \in \{-1, 1\}$ . Dar  $f(1) = 1$ , iar  $f(-1) = -1$ , deci  $f(x) \neq i$ , fals.

#### Subiectul IV

a) Avem  $f_1(x) = \int_0^x (t - \sin t) dt = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1, (\forall)x \in \mathbf{R}$ .

b)  $f_1'(x) = x - \sin x, (\forall)x \in \mathbf{R}$  si  $f_1''(x) = 1 - \cos x \geq 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$ . Deducem ca functia  $f_1$  este convexa pe  $\mathbf{R}$ .

c) vezi varianta 45, subiectul IV, e).

d) vezi varianta 45, subiectul IV, f).

e) Din punctul d)  $\Rightarrow f_{4n-1}(x) > 0, (\forall)n \in \mathbf{N}^*, (\forall)x \in [0, \infty)$ .

De aici obtinem  $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*, (\forall)x \in [0, \infty)$ . Analog se arata ca  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}, (\forall)x \in [0, \infty)$ .

f) vezi varianta 45, subiectul IV, g).

g) Presupunem ca,  $\cos 1 \in \mathbf{Q}$  si deci exista  $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$  astfel incat  $\cos 1 = \frac{p}{q}$ . Din e)  $\Rightarrow 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{(4n)!} - \frac{1}{(4n+2)!} < \cos 1 < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{(4n)!}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$ .

In particular  $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{(4q)!} - \frac{1}{(4q+2)!} < \frac{p}{q} < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{(4q)!}$  si deci  $-\frac{1}{(4q+2)!} < \frac{p}{q} - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{1}{(4q)!} < 0$ ;

Deducem ca  $-1 < (4q+2)!\left(\frac{p}{q} - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{1}{(4q)!}\right) < 0$ .

Cum  $(4q+2)!\left(\frac{p}{q} - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{1}{(4q)!}\right) \in \mathbf{Z}$  obtinem o contradictie.