

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta034***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-5)$, $B(-1,2)$, $C(4,7)$, $D(5,0)$.

- (4p) a) Să se determine $a,b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(0,-5)$ și $C(4,7)$ să aparțină dreptei $ax + by = 5$
- (4p) b) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului BCD .
- (4p) c) Să se arate că dreptele AC și BD sunt perpendiculare.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se rezolve ecuația $\sin 3x = 0$, $x \in (0,2\pi)$.
- (2p) f) Să se determine modulul numărului complex $(3+4i) \cdot (-1-i)$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2} = 2$.
- (3p) b) Să se determine al treilea termen al dezvoltării $(2x - \sqrt[3]{x})^{50}$.
- (3p) c) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^4$ la polinomul $g = X^2 - 3X$.
- (3p) d) Să se arate că numărul 2007 aparține progresiei aritmetice 2, 7, 12, 17, ...
- (3p) e) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Să se determine $f(f(2))$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{2x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se arate că f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) c) Să se arate că f este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se determine asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0,1)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$ și funcția $f : \mathbf{C} \rightarrow M$,

$f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Se consideră cunoscute formulele

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \text{ și } \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x.$$

- (4p) a) Să se arate că $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $a^2 + b^2 = r^2$, $r \in [0, \infty)$ atunci există $t \in [0, 2\pi)$ astfel ca $a = r \cos t$ și $b = r \sin t$.
- (4p) c) Să se arate că $\begin{pmatrix} r \cos t & -r \sin t \\ r \sin t & r \cos t \end{pmatrix}^n = r^n \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ atunci $a_n^2 + b_n^2 = (a^2 + b^2)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $a^2 + b^2 < 1$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
- (2p) f) Să se arate că dacă matricea $X \in M_2(\mathbf{R})$ verifică relația
- $$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ atunci } X \in M.$$
- (2p) g) Să se determine numărul matricelor $X \in M_2(\mathbf{R})$ care verifică ecuația
- $$X^{2007} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \geq 0$.

- (4p) a) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.
- (4p) b) Să se arate că $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.
- (4p) c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.
- (2p) d) Să se arate că $\sqrt{2n+1} \leq a_n \leq \sqrt{(2n+1)+1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}}$, $\forall n \geq 1$.
- (2p) e) Să se arate că $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \infty$.

Varianta 034**Subiectul I**

- a) $a = 3, b = -1$. b) $\left(\frac{8}{3}, 3\right)$. c) $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$. d) 20. e) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$. f) $5\sqrt{2}$.

Subiectul II

1. a) $-1; 1$. b) $C_{50}^2 2^{48} x^{\frac{146}{3}}$. c) $q = X^2 + 3X + 9$. d) Da. e) 2

2. a) $2e^{2x}$. b) $f'(x) > 0$. c) $f''(x) > 0$. d) $y = 0$. e) $y = 2x + 1$.

Subiectul III

a) Verificarea este imediată.

b) Dacă $r > 0$, punctul $P\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ este situat pe cercul unitate. Asadar există numărul unic $t \in [0, 2\pi)$ astfel

$$\text{încât } \frac{a}{r} = \cos t, \frac{b}{r} = \sin t.$$

Dacă $P=O$, atunci $a=b=r=0$ și $t \in [0, 2\pi)$ e oarecare.

c) Se utilizează metoda inducției matematice și se tine cont de formulele $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ și $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

d) Din egalitatea $A^{n+1} = A^n \cdot A$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$ obține, $\det(A^{n+1}) = \det(A^n) \det(A)$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, deci

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)(a_n^2 + b_n^2), (\forall)n \in \mathbf{N}^*. \text{ Inductiv se obține } a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)^n.$$

e) Dacă $a^2 + b^2 < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^2 + b^2)^n = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$. Avem inegalitatele:

$$0 \leq a_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2, (\forall)n \in \mathbf{N}^* \text{ și } 0 \leq b_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2, (\forall)n \in \mathbf{N}^*. \text{ Din criteriul "clestelui" obținem}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 0, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

f) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$. Din $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} X = X \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ rezultă $z = -x$ și $x = t$. Asadar există

$$a, b \in \mathbf{R} \text{ astfel incat } X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$$

$$g) \text{ Fie } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \text{ Avem } XA = XX^{2007} = X^{2007} X = AX.$$

Din f) rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Din $X^{2007} = A$ rezulta $(\det X)^{2007} = 1$ rezulta

$\det X = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$. Asadar există $x \in \mathbf{R}$ astfel ca $a = \cos x, b = \sin x$.

Avem $X = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$. Ecuatia devine

$$\begin{pmatrix} \cos 2007x & -\sin 2007x \\ \sin 2007x & \cos 2007x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}, \text{ obtinem } x_k = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2007}, k \in \mathbf{Z}.$$

Ecuatia are 2007 solutii si anume $X_k = \begin{pmatrix} \cos x_k & -\sin x_k \\ \sin x_k & \cos x_k \end{pmatrix}, k \in \{0, 1, \dots, 2006\}$.

Subiectul IV

a) Prin inductie rezulta : $a_n > 0, (\forall)n \geq 0, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0, (\forall)n \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$(a_n)_{n \geq 0}$ strict crescător.

b) $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 > a_n^2 + 2, (\forall)n \in \mathbf{N}.$

c) Din a) rezultă că există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l, l \in (0, \infty)$ sau $l = \infty$. Presupunand că $l \in (0, \infty)$, trecem la limita in relația de recurență și obținem $l = l + \frac{1}{l}$. Deducem că $\frac{1}{l} = 0$ fals. Așadar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

d) Fie $P(n)$: $a_n > \sqrt{2n+1}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$ si $Q(n)$: $a_n \leq \sqrt{(2n+1)+1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}}, (\forall)n \geq 1$.

Cum $a_1 = 2 > \sqrt{3}$ arătăm ca $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Avem de notat $a_{n+1} > \sqrt{2n+3}$. Din $P(n)$ rezultă ca $a_n > \sqrt{2n+1}$ de unde $a_{n+1}^2 > 2n+3$. Avem

$a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2 > 2n+3 \Leftrightarrow a_{n+1} > \sqrt{2n+3}$. Cum $a_1 = 2 \leq 2$ aratăm ca $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$. Avem de arătat $a_{n+1} \leq \sqrt{(2n+3)+1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n+1}} \Leftrightarrow a_{n+1}^2 \leq (2n+3)+1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n+1}$

e) Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(t) = \ln t$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției pe intervalul $[x, x+1]$ si avem $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c) = \frac{1}{c}$, unde $c \in (x, x+1)$. Deducem că $\frac{1}{x+1} < c < \frac{1}{x}$, si deci

$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, (\forall)x > 0$.

f) $\sqrt{2n+1} < a_n \leq \sqrt{(2n+1)+1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}} < \sqrt{(2n+1)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}}, (\forall)n \geq 1$.

Din e) $\Rightarrow \ln 2 - \ln 1 > \frac{1}{2}, \ln 2 - \ln 2 > \frac{1}{3}, \dots, \ln(2n-1) - \ln(2n-2) > \frac{1}{2n-1}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$

Deducem că $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} < \ln(2n+1), \forall n \in \mathbf{N}^*$

$\Rightarrow \sqrt{2n+1} < a_n < \sqrt{(2n+1)+1+\ln(2n+1)}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Rezultă că: $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{\frac{(2n+2)}{n} + \frac{\ln(2n+1)}{n}}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$. Obtinem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

g) Avem $\frac{1}{a_n} = a_{n+1} - a_n, (\forall)n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = a_{n+1} - a_0 = a_{n+1} - 1, (\forall)n \geq 0$.

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \infty$ obtinem $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}) = \infty$.