

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....033***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete****SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\frac{4-i}{1+4i}$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(4,3,2)$  la planul  $x+2y+3z-5=0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la elipsa  $x^2 + 4y^2 = 5$  în punctul  $P(1, -1)$ .
- (4p) d) Să se arate că  $\sin 4 < \sin 3$ .
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(2, 1, 1)$  și  $D(4, 3, 2)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$  și  $C(2, 1, 1)$  să aparțină planului  $x + ay + bz + c = 0$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Să se calculeze suma elementelor grupului  $(\mathbf{Z}_7, +)$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$  să verifice relația  $\hat{x}^3 = \hat{1}$ .
- (3p) c) Să se arate că  $\log_2 9 > \log_3 4$ .
- (3p) d) Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării binomului  $(1 + \sqrt{2})^{10}$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului  $f = X^3 - 2X^2 + 3$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x - \cos x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe intervalul  $[0, \infty)$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$ .

**PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică*****Varianta 033***

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $M$  formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elementele din mulțimea  $\{-1, +1\}$ .

- (4p) a) Să se găsească o matrice  $C \in M$ , pentru care  $\det(C) = 4$ .
- (4p) b) Să se arate că, dacă  $A \in M$ , atunci determinantul matricei  $A$  se divide cu 4.
- (4p) c) Să se arate că, dacă  $A \in M$ , atunci  $-6 \leq \det(A) \leq 6$ .
- (2p) d) Să se arate că, dacă  $A \in M$ , atunci  $\det(A) \in \{-4, 0, 4\}$ .
- (2p) e) Să se arate că, dacă  $B \in M$  este o matrice inversabilă, atunci  $B^{-1} \notin M$ .
- (2p) f) Să se arate că,  $\forall r \in \{1, 2, 3\}$  există  $A \in M$ , astfel încât  $\text{rang}(A) = r$ .
- (2p) g) Să se arate că, dacă  $A \in M$ , atunci matricea  $A^{2007}$  are toate elementele nenule.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Pentru orice număr natural nenul  $n$  notăm cu  $p_n$  al  $n$ -lea număr prim și cu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sirul

$$a_n = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n}{p_n - 1}.$$

- (4p) a) Să se arate că  $1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ ,  $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- (4p) b) Dacă  $a \in (-1, 1)$ , să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \dots + a^n) = \frac{1}{1 - a}$ .
- (4p) c) Să se arate că dacă  $p > 1$ , atunci  $\frac{p}{p-1} > 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ ,  $\forall x > 0$ .
- (2p) e) Să se arate că  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

## Varianta 33

## Subiectul I

a) 1. b)  $\frac{11}{\sqrt{14}}$ . c)  $x-4y=5$ . d)  $\sin 4 < 0$  și  $\sin 3 > 0$ . e)  $\frac{5}{6}$ . f)  $a=b=1$ ,  $c=-4$ .

## Subiectul II

1. a)  $\hat{0}$ . b)  $\frac{1}{5}$ . c)  $\log_2 9 = 2 \log_2 3 > 2$  și  $\log_3 4 = 2 \log_3 2 < 2$ . d) 5 e) 2.

2. a)  $1 + \sin x$ . b)  $\frac{1}{2} - \sin 1$ . c)  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall [0, \infty)$ . d)  $1 + \sin 1$ . e)  $\frac{\ln^2 2}{2}$ .

## Subiectul III

a)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Dacă adumăm linia 1 la linia 2 și la linia 3, obținem elemente din mulțimea  $\{-2, 0, 2\}$ , deci numai numere pare. Scoatem factor pe 2 de pe linia 2 și de pe linia 3 și determinantul obținut se divide cu 4.

c) Cum  $\det(A)$  este o sumă de 6 termeni din mulțimea  $\{-1, +1\}$ , rezultă că  $-6 \leq \det(A) \leq 6$ .  
d) rezultă din b) și c).

e) Dacă  $B^{-1} \in M$ , atunci  $B \cdot B^{-1} = I_3$ , imposibil deoarece matricea  $B \cdot B^{-1}$  va avea numai elemente impare.

f) Pentru  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  avem  $\text{rang } A = 1$ , pentru  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  avem  $\text{rang } A = 2$ , pentru

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  avem  $\text{rang } A = 3$ .

g) Matricea  $A^2$  are numai elemente impare și utilizând metoda inducției matematice se arată ca pentru orice  $n$  număr nenul matricea  $A^n$  are numai elemente impare. În particular, matricea  $A^{2007}$  are numai elemente impare.

## Subiectul IV

a) Numerele  $1, a, \dots, a^n$  sunt în progresie geometrică cu rația  $a \neq 1$ .

b) Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \dots + a^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$ .

c) Avem  $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} = \frac{1 - \frac{1}{p^{n+1}}}{1 - \frac{1}{p}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

d) Fie  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(t) = \ln(1+t) - t$ . Cum  $f'(t) = -\frac{t}{1+t}$ ,  $f$  este crescatoare pe  $(-1, 0)$  și descrescătoare pe  $(0, +\infty)$ .  $f(0) = 0$  este valoarea maxima, deci  $f(t) \leq 0$ , pentru orice  $t > -1$ .

Deducem că  $f(\frac{1}{x}) < 0$ ,  $\forall x > 0 \Leftrightarrow \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} < 0$ ,  $\forall x > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ ,  $\forall x > 0$ .

e) Cum  $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \forall x > 0$  avem:  $\ln 2 - \ln 1 < 1$ ,  $\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$ , ...,  $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$  rezulta  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

f) Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$  din e)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \infty$ .

g) Fie  $\varepsilon > 0$  și  $s \in \mathbf{N}$  astfel încât  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} > \varepsilon$ . Alegem  $k = [\log_2 s!]$  și

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  mulțimea numerelor prime care se găsesc în dezvoltarea lui  $s!$ .

Atunci  $a_k = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k}{p_k - 1} > \left( 1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^k} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 + \frac{1}{p_t} + \dots + \frac{1}{p_t^k} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} > \varepsilon$

Deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .