

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta032***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(4,3)$ la dreapta de ecuație $2x + y - 1 = 0$.
- (4p) b) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}$.
- (4p) c) Să se calculeze $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe
- $$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = a + ib.$$
- (4p) d) Să se calculeze lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC având laturile $AB = 4$, $BC = 6$, $CA = 8$.
- (2p) e) Să se determine $a \in (0, \infty)$ astfel încât punctul $A(a,1)$ să aparțină elipsei $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- (2p) f) Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$, unde $A(1,1,1)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,1)$ și $D(0,1,1)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră inelul \mathbf{Z}_4 și mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \mid \hat{a}, \hat{b} \in \mathbf{Z}_4 \right\}$.
- (3p) a) Să se determine numărul elementelor inversabile față de înmulțire din inelul \mathbf{Z}_4 .
- (3p) b) Să se rezolve ecuația $\hat{x}^2 = \hat{2}\hat{x}$ în multimea \mathbf{Z}_4 .
- (3p) c) Să se calculeze $\hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{2} \cdot \hat{3} + \hat{3} \cdot \hat{1}$ în inelul \mathbf{Z}_4 .
- (3p) d) Să se calculeze numărul elementelor mulțimii M .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca alegând o matrice din mulțimea M , aceasta să aibă suma elementelor egală cu $\hat{0}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
- (3p) a) Să se determine ecuația asimptotei verticale a graficului funcției f .
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (3p) c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -1)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră o funcție bijectivă $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ cu proprietățile: $f(z + w) = f(z) + f(w)$,

$$f(z \cdot w) = f(z) \cdot f(w) \quad \forall z, w \in \mathbf{C}, \text{ și } f(x) \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

(4p) a) Să se arate că $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$.

(4p) b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$f(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și } \forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}.$$

(2p) c) Să se arate că $f(r) = r, \forall r \in \mathbf{Q}$.

(2p) d) Să se arate că dacă $x \in \mathbf{R}$, atunci $f(x) > 0$ dacă și numai dacă $x > 0$.

(2p) e) Dacă $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ cu $x_1 < x_2$, să se arate că $f(x_1) < f(x_2)$.

(2p) f) Să se arate că $f(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) g) Să se arate că $f(i) = i$ sau $f(i) = -i$.

(2p) h) Să se arate că $f(z) = z, \forall z \in \mathbf{C}$ sau $f(z) = \bar{z}, \forall z \in \mathbf{C}$.

SUBIECTUL IV (20p)

(4p) Se consideră funcțiile: $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f_0(x) = x - \sin x$ și

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

a) Să se verifice că $f_1(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1, \forall x \in [0, \infty)$.

(4p) b) Să se arate că f_1 este convexă.

(4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că:

$$f_{2n}(x) = (-1)^n \left(-\sin x + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right), \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

(2p) d) Să se arate că $f_n(x) > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in (0, \infty)$.

(2p) e) Să se arate că:

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} < \sin x < \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

(2p) f) Să se arate că: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) g) Să se arate că $\sin 1 \notin \mathbf{Q}$.

Varianta 032**Subiectul I**

a) $2\sqrt{5}$. b) 1. c) $a=-1$, $b=0$. d) $\sqrt{15}$. e) $a=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. f) $\frac{1}{6}$.

Subiectul II

1. a) 2 elemente inversabile: $\hat{1}, \hat{3}$. b) soluțiile ecuației sunt $\hat{0}, \hat{2}$;

c) $\hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{2} \cdot \hat{3} + \hat{3} \cdot \hat{1} = \hat{3}$. d) $2^4 = 16$. e) $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

2. a) $x = -1$ asimptotă verticală. b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1$.

c) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. d) $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f$ concavă pe $(-\infty, -1)$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(t + \frac{1}{t+1} \right) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) \right) = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Subiectul III

a) $z=w=0 \Rightarrow f(0)=2f(0) \Rightarrow f(0)=0$. $z=w=1 \Rightarrow f(1 \cdot 1)=f(1)f(1) \Rightarrow f(1)^2=f(1) \Rightarrow f(1)=0$ sau $f(1)=1$, dar $f(1)=0$ este contradicție cu f injectivă.

b) $f(z_1+z_2)=f(z_1)+f(z_2)$ adevărat. $P(n) \rightarrow P(n+1)$:

Presupunem $f(z_1+z_2+\dots+z_n)=$

$=f(z_1)+f(z_2)+\dots+f(z_n)$ adevarata și demonstrăm că

$f(z_1+z_2+\dots+z_n+z_{n+1})=f(z_1)+f(z_2)+\dots+f(z_n)+f(z_{n+1})$.

Avem $f(z_1+z_2+\dots+z_n+z_{n+1})=f(z_1+z_2+\dots+z_n)+f(z_{n+1})=f(z_1)+f(z_2)+\dots+f(z_n)+f(z_{n+1})$.

c) $z_1=z_2=\dots=z_n=1 \Rightarrow f(n)=nf(1)=n \Rightarrow f(n)=n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Avem $f(z+(-z))=f(z)+f(-z) \Rightarrow 0=f(z)+f(-z) \Rightarrow f(-z)=-f(z) \forall z \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(x)=x, \forall x \in \mathbf{Z}$.

Avem $1=f(1)=f\left(\frac{n}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{1}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$,

$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{1}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}$, deci $f(r)=r$, oricare ar fi $r \in \mathbf{Q}$.

d) Fie $x > 0 \Rightarrow f(x)=f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})=(f(\sqrt{x}))^2 > 0$.

e) Fie $x_1 < x_2$, $x_2-x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2-x_1) > f(0) \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

f) Fie $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Pentru orice numere rationale x_1, x_2 cu $x_1 < x < x_2$ avem $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$
 $\Leftrightarrow x_1 < f(x) < x_2$ și cum x_1, x_2 sunt arbitrară rezulta $f(x)=x$. În concluzie, tinând seama și de c), rezulta $f(x)=x, \forall x \in \mathbf{R}$.

g) $f(i \cdot i)=f(i) \cdot f(i) \Rightarrow f(-1)=(f(i))^2 \Rightarrow f^2(i)=-1 \Rightarrow f(i)=-i$ sau $f(i)=i$.

h) $f(z)=f(a+bi)=f(a)+f(b)i \Rightarrow f(a)+if(b)=a+bi=z, f(a)-if(b)=a-bi=\bar{z}$.

Subiectul IV

a) $f_1(x) = \int_0^x f_0(t)dt = \int_0^x (t - \sin t)dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + \cos t \Big|_0^x = \cos x - \cos 0 + \frac{x^2}{2} = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1, \forall x \in [0, \infty)$

b) $f_1'(x) = x - \sin x \Rightarrow f_1''(x) = 1 - \cos x; \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow f_1''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ convexa

c) pt $n = 0$ verificarea este facuta. Sa demonstrem ca $P(n) \rightarrow P(n+1): f_{2n+2}(x) = \int_0^x f_{2n+1}(t)dt$

$$f_{2n+1}(x) = \int_0^x f_{2n}(t)dt = \int_0^x \left[(-1)^n \left(-\sin t + \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right] dt = \\ = (-1)^n \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right) \Rightarrow$$

$$f_{2n+2}(x) = \int_0^x (-1)^n \left[\cos t - 1 + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} \right] dt = \\ = (-1)^{n+1} \left(-\sin x + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right)$$

d) prin inductie : pentru $n = 0$ este evident; $f_n(x) \geq 0 \Rightarrow \int_0^x f_n(t)dt \geq 0 \Rightarrow f_{n+1}(x) \geq 0$

e) $f_n(x) \geq 0 \Rightarrow f_{4n}(x) \geq 0 \Rightarrow (-1)^{2n} \left(-\sin x + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{2n} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \right) > 0 \Rightarrow$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{2n} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} > \sin x, f_{2(2n-1)}(x) \geq 0 \Rightarrow$$
 membrul stang al inegalitatii

f) din e) $\Rightarrow 0 < \sin x - \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \dots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} < \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

g) presupunem $\sin 1 \in \mathbb{Q}$ si deci exista $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ asfel incat $\sin 1 = \frac{p}{q}$. Din e) \Rightarrow

$$1 - \frac{1}{3!} + \dots - \frac{1}{(4n-1)!} < \sin 1 < 1 - \frac{1}{3!} + \dots - \frac{1}{(4n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

In particular $1 - \frac{1}{3!} + \dots - \frac{1}{(4q-1)!} < \frac{p}{q} < 1 - \frac{1}{3!} + \dots - \frac{1}{(4q+1)!} \Rightarrow$

$$-\frac{1}{(4q-1)!} < \frac{p}{q} - 1 + \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{(4q-3)!} < 0 \Rightarrow -1 < (4q-1)! \left(\frac{p}{q} - 1 + \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{(4q-3)!} \right) < 0$$

Cum $(4q-1)! \left(\frac{p}{q} - 1 + \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{(4q-3)!} \right) \in \mathbb{Z}$ obtinem contradictie.