

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta031***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(3,0,2)$ la planul $x + 5y + 2z - 4 = 0$.
- (4p) c) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul $x^2 + y^2 = 4$ și dreapta $y = 3x$.
- (4p) d) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ să fie perpendiculari.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 2)$, $B(1, 4)$ și $C(-1, 8)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\sin 10^\circ + i \cos 10^\circ)^6 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se determine numărul polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2 din $\mathbf{Z}_2[X]$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_7$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.
- (3p) c) Să se determine numărul de mulțimi X care verifică $\{1,2,3\} \cup X = \{1,2,3,4,5\}$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 2 \cdot 9^x = 3$.
- (3p) e) Să se arate că $\log_3 4 > \log_4 3$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2 \cos x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

Varianta 031

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ și $g = X^4 + 1$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$, iar g are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -d & a & b & c \\ -c & -d & a & b \\ -b & -c & -d & a \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se verifice că $g = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$
- (4p) b) Să se arate că $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$.
- (4p) c) Să se determine rangul matricei V .
- (2p) d) Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) & x_4 f(x_4) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) & x_4^2 f(x_4) \\ x_1^3 f(x_1) & x_2^3 f(x_2) & x_3^3 f(x_3) & x_4^3 f(x_4) \end{pmatrix}$.
- (2p) e) Utilizând relația $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in \mathbf{M}_4(\mathbf{C})$, să se arate că $\det(A) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \cdot f(x_4)$.
- (2p) f) Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $\det(A) = 0$, atunci $a = b = c = d = 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirurile $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$, definite prin $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ și

$b_n = a_n + \frac{1}{n!n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Admitem cunoscut faptul că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este

convergent către e .

- (4p) a) Să se verifice că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.
- (4p) b) Să se arate că sirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.
- (2p) c) Să se arate că $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$.
- (2p) d) Să se arate că $a_{n+1} < e < b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $\frac{1}{(n+1)!} < e - a_n < \frac{1}{n!n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se demonstreze că numărul e este irațional.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} = 0$, $\forall k \in \mathbf{N}$.
- (2p) h) Să se arate că nu există două polinoame nenule $f, g \in \mathbf{R}[X]$, cu proprietatea $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 031

Subiectul I

- a) $|\vec{v}| = 13$. b) $d(D, \Pi) = \frac{\sqrt{30}}{10}$. c) $A\left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}}{5}\right); B\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$. d) $a = -3$. e) 2.
f) $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II

1. a) 8. b) $\frac{2}{7}$. c) $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8$. d) $x = 0$. e) $\log_3 4 > \log_4 3 \Leftrightarrow \log_3 4 > \frac{1}{\log_3 4} \Leftrightarrow (\log_3 4)^2 > 1 \Leftrightarrow \log_3 4 > 1$, evidentă.
2. a) $f'(x) = 3 + 2 \sin x$. b) $\int_0^\pi (3x - 2 \cos x) dx = \frac{3\pi^2}{2} \dots$
c) $f'(x) = 3 + 2 \sin x > 0, \forall x \in R$, deoarece $-1 \leq \sin x \leq 1$, deci f este strict crescătoare pe \mathbf{R}
d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 3 + 2 \sin 1$. e) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{4}$.

Subiectul III

- a) $g = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.
b) $\det V = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$ (Vandermonde).
c) $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 2 - 4 < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$ sau $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta_2 = -2 < 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$,
 $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4 \Rightarrow \det V \neq 0 \Rightarrow \text{rang } V = 4$.
d) Vom demonstra pentru elementele de pe coloana 1: $a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 = f(x_1)$.
 $-d + ax_1 + bx_1^2 + cx_1^3 = dx_1^4 + ax_1 + bx_1^2 + cx_1^3 = x_1(a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3) = x_1 f(x_1)$
 $-c - dx_1 + ax_1^2 + bx_1^3 = cx_1^4 + dx_1^5 + ax_1^2 + bx_1^3 = x_1^2(a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3) = x_1^2 f(x_1)$
 $-b + c(-x_1) - dx_1^2 + ax_1^3 = bx_1^4 + cx_1^5 + dx_1^4 + ax_1^3 = x_1^3(a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3) = x_1^3 f(x_1)$
Am folosit $x_1^4 = -1$ deoarece x_1 este radacina a lui $g \Rightarrow g(x_1) = 0 \Rightarrow x_1^4 + 1 = 0$.

e) $\det(A \cdot V) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) \det V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det A = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4);$$

f) Singura descompunere a lui g în $\mathbf{R}[X]$ este cea de la a), care nu este descompunere în $\mathbf{Q}[X]$.

g) $\det A = 0 \Rightarrow f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) = 0 \Rightarrow x_1$ (de exemplu) rădăcină a lui $f \Rightarrow f \mid g$, dar $\text{grad } f < \text{grad } g$ și $f \in Q[X] \Rightarrow f = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$.

Subiectul IV

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescator.

b) $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \Rightarrow (b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescator.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{n!n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!n} = e$.

d) $(a_n)_{n \geq 1}$ strict crescator și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \Rightarrow a_n < e, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$. $(b_n)_{n \geq 1}$ strict descrescator și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e \Rightarrow e < b_n, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$. Din cele două relații obținem $a_{n+1} < e < b_{n+1}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

e) Din punctul c) $\Rightarrow a_n + \frac{1}{(n+1)!} < e < a_n + \frac{1}{n!n}, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} < e - a_n < \frac{1}{n!n}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

f) Presupunem prin reducere la absurd că $e \in \mathbf{Q} \Rightarrow e = \frac{p}{q}, p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Z}^*$. Aplicam relația

de la punctul e) pentru $n=q$ și obținem $\frac{1}{(q+1)!} < \frac{p}{q} - a_q < \frac{1}{q!q}$. Înmulțim inegalitățile cu $q!$

vom avea $0 < \frac{1}{q+1} < p(q-1)! - a_q q! < \frac{1}{q!} \leq 1 \Rightarrow 0 < p(q-1)! - a_q q! < 1$. Dar $p(q-1)! - a_q q! \in \mathbf{Z}$ fals.

Deci $e \notin \mathbf{Q}$.

g) Fie $c_n = \frac{n^k}{n!} \Rightarrow c_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)!}; c_n > 0 \Rightarrow (c_n)_{n \geq 1}$ mărginit

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^k \frac{1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \frac{1}{n+1} < 1 \Rightarrow c_{n+1} = c_n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \frac{1}{n+1}$ sirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este convergent

și are limita $l \Rightarrow c_n \rightarrow l \Rightarrow c_{n+1} \rightarrow l \Rightarrow l = l \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} = 0$;

h) Presupunem că există $f, g \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$\frac{1}{(n+1)!} = a_{n+1} - a_n = \frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{u(n)}{v(n)}$ sau $u(n) = \frac{v(n)}{(n+1)!}$. Dar

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0 \Rightarrow u$ este polinomul nul, fals $\left(\text{am avea } \frac{1}{(n+1)!} = 0 \right)$.