

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta030***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3+5i}{7-i}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2,3)$ la planul $x+y+z-4=0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2 + 4y^2 = 13$ dusă prin punctul $P(3,1)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(10, 2)$, $M(20, 3)$ și $N(30, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 5, 2)$, $B(5, 2, 1)$, $C(2, 1, 5)$ și $D(1, 2, 3)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(1-i)^{10} = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $2^n + 3^n > 5^n$.
- (3p) c) Să se găsească o matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\text{rang}(A) = 1$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 8) = 2$.
- (3p) e) Să se calculeze inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{x^2}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$.

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică***Varianta 030***

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră un număr prim $p, p \geq 3$, iar în corpul \mathbf{Z}_p se consideră submulțimea

$G = \mathbf{Z}_p \setminus \{\hat{0}\}$. Considerăm polinoamele $g, h \in \mathbf{Z}_p[X]$, definite prin $g = X^{p-1} - \hat{1}$,
 $h = (X - \hat{1})(X - \hat{2}) \dots (X - (\hat{p} - \hat{1}))$.

- (4p) a) Să se arate că dacă $\hat{x}, \hat{y} \in G$, atunci $\hat{x} \cdot \hat{y} \in G$.

Pentru un element $\hat{a} \in G$, definim funcția $f : G \rightarrow G$, $f(\hat{x}) = \hat{a}\hat{x}$.

- (4p) b) Să se arate că funcția f este injectivă.

- (4p) c) Să se arate că funcția f este bijectivă.

- (2p) d) Din egalitatea $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) = f(\hat{1}) \cdot f(\hat{2}) \cdot \dots \cdot f(\hat{p} - \hat{1})$,
 să se deducă relația $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}, \forall \hat{a} \in G$.

- (2p) e) Să se arate că $g(\hat{x}) = h(\hat{x}) = \hat{0}, \forall \hat{x} \in G$

- (2p) f) Să se arate că $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) + \hat{1} = \hat{0}$.

- (2p) g) Să se arate că dacă $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbf{N}^*$, prime între ele, atunci p îl
 divide pe a .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, n \geq 1$.

Se consideră sirul $(w_n)_{n \geq 1}$ definit prin $w_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1}$.

- (4p) a) Să se calculeze I_0 și I_1 .

- (4p) b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \forall n \geq 2$.

- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (2p) d) Să se arate că $I_{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (2p) e) Să se arate că $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (2p) f) Să se verifice că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = (w_n)^2 \cdot \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Varianta 030**Subiectul I**

a) $\left| \frac{3+5i}{7-i} \right| = \frac{\sqrt{17}}{5}$.

b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

c) Ecuația tangentei este $3x + 4y - 13 = 0$

d) Deoarece $\begin{vmatrix} x_L & y_L & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix} = 0$, punctele L, M, N sunt coliniare.

e) $V_{ABCD} = \frac{13}{3}$.

f) $a = 0$ și $b = -32$.

Subiectul II.

1.

a) 12.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{5}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$

d) $x \in \{-1, 1\}$.

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.

a) $f'(x) = (1 + 2x^2) \cdot e^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e-1}{2}$.

c) $f'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 3e$.

e) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{\ln 2}{3}$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) Se folosește definiția funcției injective.

c) Deoarece G este o mulțime finită și funcția $f : G \rightarrow G$ este injectivă, rezultă că ea este și bijectivă.

d) Pentru $\hat{a} \in G$, deoarece f este bijectivă, avem

$$\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) = f(\hat{1}) \cdot f(\hat{2}) \cdot \dots \cdot f(\hat{p} - \hat{1}) = \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) \cdot \hat{a}^{p-1} \Leftrightarrow \hat{a}^{p-1} = \hat{1}.$$

e) Pentru $\hat{x} \in G$ avem $g(\hat{x}) = \hat{x}^{p-1} - \hat{1} = \hat{1} - \hat{1} = \hat{0}$ iar

$$h(\hat{x}) = (\hat{x} - \hat{1})(\hat{x} - \hat{2}) \cdot \dots \cdot (\hat{x} - (\hat{p} - \hat{1})) = \hat{0}, \text{ deoarece unul dintre factori este } \hat{0}.$$

f) Considerăm polinomul $u = g - h \in \mathbf{Z}_p[X]$. Obținem că u are cel puțin $p-1$ rădăcini și apoi că u este polinomul nul.

Atunci, $g(X) = h(X)$, deci și $g(\hat{0}) = h(\hat{0})$, adică $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) + \hat{1} = \hat{0}$.

g) Aducând la același numitor în relația din enunț și calculând în \mathbf{Z}_p , obținem:

$$\hat{b} \cdot (\hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) + \hat{1} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) + \dots + \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{2})) = \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) \cdot \hat{a} \quad (1)$$

Dar $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\hat{k} - \hat{1}) \cdot (\hat{k} + \hat{1}) \cdot \dots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) = -\hat{1} \cdot \hat{k}^{-1}$, $\forall \hat{k} \in \mathbf{Z}_p^*$.

$$\text{Egalitatea (1) devine } \hat{b} \cdot (\hat{1}^{-1} + \hat{2}^{-1} + \dots + (\hat{p} - \hat{1})^{-1}) = \hat{a} \quad (2)$$

Avem $G = \{\hat{1}^{-1}, \hat{2}^{-1}, \dots, (\hat{p} - \hat{1})^{-1}\}$, deci (2) $\Leftrightarrow \hat{b} \cdot (\hat{1} + \hat{2} + \dots + (\hat{p} - \hat{1})) = \hat{a}$.

Deoarece p este un număr prim impar, rezultă ușor că $\hat{1} + \hat{2} + \dots + (\hat{p} - \hat{1}) = \hat{0}$, deci p îl divide pe a .

Subiectul IV.

a) $I_0 = \frac{\pi}{2}$ și $I_1 = 1$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se folosește primul principiu de inducție și relația de la punctul b).

d) Se folosește primul principiu de inducție și relația de la punctul b).

e) Se arată ușor că sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător și că $I_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci, din b) obținem $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot I_{n-1} > \frac{n}{n+1} \cdot I_n \Rightarrow 1 < \frac{I_n}{I_{n+1}} < \frac{n+1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

f) Din c) și d) rezultă $I_{2n} = \frac{w_n}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}$ și $I_{2n+1} = \frac{1}{w_n \cdot \sqrt{2n+1}}$, de unde

$$\text{obținem } \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = w_n^2 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

g) Trecând la limită în dubla inegalitate de la e), obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$, și din f)

$$\text{rezultă că } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$