

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta029***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex i .
- (4p) b) Să se determine numărul real m astfel încât centrul de greutate al triunghiului cu vârfurile $A(2m,5)$, $B(m-2,7)$ și $C(-1,m)$ să se afle pe axa Ox .
- (4p) c) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 13$ și dreapta $3y + 2x = 0$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(-1, 2)$, $M(-2, 3)$ și $N(-3, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(-3, 3)$ și $B(-1, 1)$.
- (2p) f) Să se determine partea reală a numărului complex $\frac{2-i}{3i+4}$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze suma $1 + 5 + 9 + \dots + 41$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea $\{12, 13, 14, \dots, 30\}$ să fie divizibil cu 7.
- (3p) c) Să se determine numărul de funcții bijective care se pot defini pe mulțimea $\{2, 4, 6\}$, cu valori în mulțimea $\{2, 4, 6\}$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 45$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.
- (3p) e) Să se calculeze restul împărțirii polinomului $X^3 + 3X - 5$ la polinomul $X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei spre ∞ la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru orice număr natural nenul n , se consideră mulțimea de numere

$$\text{raționale } H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

- (4p) a) Să se arate că dacă $x, y \in H_n$, atunci $x + y \in H_n$.
- (4p) b) Să se verifice că dacă $x \in H_n$, atunci $-x \in H_n$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $n < p$, $n, p \in \mathbf{N}^*$ atunci $H_n \subset H_p$.
- (2p) d) Să se arate că pentru orice număr rațional r , există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $r \in H_n$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $(G, +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbf{Q}, +)$ și $\frac{1}{n!} \in G$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $H_n \subset G$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $A \subset \mathbf{N}^*$ este o submulțime infinită și $(H, +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbf{Q}, +)$ cu proprietatea că $\frac{1}{n!} \in H$, $\forall n \in A$, atunci $H = \mathbf{Q}$.
- (2p) g) Să se demonstreze că, dacă G_1, \dots, G_{2007} sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbf{Q}, +)$ și $\mathbf{Q} = G_1 \cup \dots \cup G_{2007}$, atunci există $i \in \{1, \dots, 2007\}$ astfel încât $G_i = \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n și funcțiile $f, F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx \text{ și } F(x) = -a_1 \cos x - \frac{a_2}{2} \cos 2x - \dots - \frac{a_n}{n} \cos nx,$$

$$\text{unde } n \in \mathbf{N}, n \geq 2. \text{ Notăm cu } S(p, q) = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx dx, \forall p, q \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f pe \mathbf{R} .
- (4p) b) Să se verifice că $F(x + 2k\pi) = F(x)$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Utilizând rezultatul: "Dacă o funcție $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este periodică și monotonă, atunci funcția g este constantă", să se arate că dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, atunci funcția F este constantă.
- (2p) d) Utilizând formula: $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, să se arate că $S(p, q) = 0$, dacă $p \neq q$, $p, q \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $S(p, p) = \pi$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se demonstreze că dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, atunci $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0$, atunci $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Varianta 029

Subiectul I

a) 1. b) $m = -12$. c) $(-3,2), (3,-2)$. d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. e) $2\sqrt{2}$. f) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{5}$.

Subiectul II

1. a) 231. b) $\frac{3}{19}$. c) 6. d) 10. e) -9.

b) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$. b) $f(x)|_0^1 = \frac{1}{2}$. c) $y=1$ asimptota orizontala. d) $\frac{1}{2}$. e) $1 - \frac{\pi}{4}$.

Subiectul III

a) $x, y \in H_n \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ astfel incat $x = \frac{k_1}{n!}, y = \frac{k_2}{n!}$. Deci $x+y = \frac{k_1+k_2}{n!}, k_1+k_2 \in \mathbf{Z}$.

b) $x \in H_n \Rightarrow x = \frac{k}{n!} \Rightarrow -x = \frac{-k}{n!} \in H_n$.

c) Fie $x \in H_n \Rightarrow \exists k \in \mathbf{Z}$ astfel incat $x = \frac{k}{n!} = \frac{k(n+1)\dots p}{n!(n+1)\dots p} = \frac{t}{p!} \in H_p$ cum x a fost ales arbitrar,

rezulta ca $H_n \subset H_p$.

d) Fie $r = \frac{p}{n} = \frac{p \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} = \frac{p \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{n!} = \frac{t}{n!} \in H_n$.

e) $\frac{1}{n!} \in G$ si G subgrup implica $\frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{n!} \in G$ Fie $x \in H_n$. Oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$ avem

$$\frac{k}{n!} = \pm \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \in G \Rightarrow H_n \subset G.$$

f) H subgrup al lui $\mathbf{Q} \Rightarrow H \subseteq \mathbf{Q}$. Aratam că $\mathbf{Q} \subseteq H$. Fie $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \exists n \in \mathbf{A}$, $n \geq q$ a.i. $\frac{1}{n!} \in H$.

$$\text{Rezulta ca } r = \frac{p}{q} = \frac{p \cdot \frac{n!}{n!}}{q \cdot \frac{n!}{n!}} \in H.$$

g) $\mathbf{Q} = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{2007} \Rightarrow G_i \subseteq \mathbf{Q}, \forall i \in \{1, 2, \dots, 2007\}$. Vom arata că există $i \in \{1, 2, \dots, 2007\}$ a.i. $\mathbf{Q} \subset G_i$.

Fie $A = \left\{ \frac{1}{n!} \mid n \in \mathbf{N}^* \right\} \subset \mathbf{Q}$. Există $i \in \{1, 2, \dots, 2007\}$ astfel încat $A \cap G_i$ este infinită.

Există o infinitate de numere n pentru care $\frac{1}{n!} \in G_i$. Atunci din f) rezultă $\mathbf{Q} = G_i$.

Subiectul IV

a) $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Evident pe baza periodicitatii functiei cos.

c) Din a) obtinem $F'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci F crescatoare pe \mathbf{R} .

Din b) obtinem F periodica, de unde folosind proprietatea enuntata obtinem ca F constanta.

$$d) S(p, q) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(p-q)x - \cos(p+q)x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-q} \sin(p-q)x - \frac{1}{p+q} \sin(p+q)x \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

pentru $p \neq q$

$$e) S(p, p) = \int_0^{2\pi} \sin^2 px dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2px) dx = \pi.$$

f) Din c) obtinem ca F constanta $\Rightarrow f(x) = F'(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Deci $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx = 0$

Inmultind aceasta egalitate cu $\sin ix$, $i=1, n$ si integrand de la 0 la 2π , pe baza punctelor d) si e) obtinem $a_i \pi = 0$, deci $a_i = 0, \forall i=1, n$.

$$g) \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} (a_1^2 \sin^2 x + \dots + a_n^2 \sin^2 nx) dx + 2 \int_0^{2\pi} \sum_{i < j} a_i a_j \sin ix \sin jx dx$$

Din d) si e) obtinem $a_1^2 \pi + \dots + a_n^2 \pi = 0 \Rightarrow a_1^2 = a_2^2 = \dots = a_n^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.