

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D****Varianta ....028**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $1+i$ .
- (4p) b) Să se calculeze modulul vectorului  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$ , unde  $M(0, 1)$ ,  $N(-1, 0)$  și  $P(0, -1)$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la cercul  $x^2 + y^2 = 20$  dusă prin punctul  $P(2, 4)$ .
- (4p) d) Să se arate că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $L(1, 0)$ ,  $M(0, 1)$ ,  $N(-1, 0)$  și  $P(0, -1)$  este pătrat.
- (2p) e) Să se calculeze coordonatele punctului de intersecție al diagonalelor patrulaterului cu vârfurile în punctele  $L(1, 0)$ ,  $M(0, 1)$ ,  $N(-1, 0)$  și  $P(0, -1)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe  $(3+2i)(3-2i) = a+bi$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 1 și rația este 3, să se calculeze termenul al șaselea.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  să verifice relația  $n^2 + 4 < 3^n$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{13} + 1$ , are inversa  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , să se calculeze  $g(2)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x^2 + 4) = 3$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului  $f = X^3 - X - 6$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x + 3^x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se determine ecuația asymptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În  $M_2(\mathbf{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $A^2 = B^2 = I_2$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei  $A$ .
- (4p) c) Să se arate că matricea  $B$  este inversabilă și să se calculeze inversa ei.
- (2p) d) Să se verifice că  $AB \neq BA$ .
- (2p) e) Să se arate că  $(BA)^n \neq I_2$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se arate că ecuația  $X^2 = I_2$  are cel puțin 2007 soluții în mulțimea  $M_2(\mathbf{Z})$ .
- (2p) g) Să se dea un exemplu de structură de grup în care există două elemente de ordin finit, al căror produs nu are ordin finit.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră numerele reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  și funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \text{ și } F(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{a_n}{n} \sin nx,$$

unde  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ . Notăm cu  $S(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx$ ,  $\forall p, q \in \mathbf{N}^*$ .

- (4p) a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$  pe  $\mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $F(x + 2k\pi) = F(x)$ ,  $\forall k \in \mathbf{Z}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Utilizând rezultatul: "Dacă o funcție  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este periodică și monotonă atunci funcția  $g$  este constantă", să se arate că dacă  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , atunci funcția  $F$  este constantă.
- (2p) d) Utilizând formula:  $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$ ,  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , să se arate că  $S(p, q) = 0$ , dacă  $p \neq q$ ,  $p, q \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) e) Să se arate că  $S(p, p) = \pi$ ,  $\forall p \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se demonstreze că dacă  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , atunci  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .
- (2p) g) Să se arate că, dacă  $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0$ , atunci  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

## Varianta 28

**Subiectul I.**

- a)  $|1+i| = \sqrt{2}$ .
- b) 0.
- c) Ecuația tangentei este  $x + 2y - 10 = 0$ .
- d)  $LM = \sqrt{2} = MN = NP = PL$ ,  $M = \frac{\pi}{2}$ , deci patrulaterul  $LMNP$  este un pătrat.
- e)  $O(0,0)$  este punctul de intersecție al diagonalelor.
- f)  $a=13$  și  $b=0$ .

**Subiectul II.**

**1.**

- a)  $a_6 = 243$ .
- b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{3}{5}$
- c)  $g(2) = 1$ .
- d)  $x \in \{-2, 2\}$ .
- e)  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 18$ .

**2.**

- a)  $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 3^x \cdot \ln 3$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 3}$ .
- c)  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \cdot \ln 2 + 3 \cdot \ln 3$ .
- e) Dreapta  $Ox: y = 0$  este asimptota orizontală spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**Subiectul III.**

- a) Se verifică prin calcul direct.
- b)  $\det(A) = -1$ ,  $\text{rang}(A) = 2$ .
- c)  $\det(B) = -4 + 3 \neq 0$ , așadar  $B$  este inversabilă. Obținem  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = B$ .
- d)  $AB = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  și  $BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ , așadar  $AB \neq BA$ .

e) Notăm  $C = BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , există  $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$  astfel încât  $C^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ .

mai mult,  $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 7a_n + 4b_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  și se arată prin inducție că  $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n > 0$ ,

deci  $\forall n \in \mathbb{N}^*, C^n \neq I_n$ .

f) Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ , considerăm matricele  $X_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , pentru care  $X_n^2 = I_2$ .

Așadar ecuația  $X^2 = I_2$  are o infinitate de soluții, deci mai mult de 2007.

g) În grupul  $(Gl_2(\mathbb{R}), \cdot)$  al matricelor inversabile de ordinul 2 cu coeficienți reali, avem  $A, B \in Gl_2(\mathbb{R})$ ,  $A^2 = B^2 = I_2$  și matricea  $BA$  are ordinul infinit.

#### Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) Evident, deoarece funcția sinus este periodică, de perioadă principală  $2\pi$ .

c) Dacă pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = F'(x) \geq 0$ , atunci funcția  $F$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$  și fiind periodică (din punctul b)), rezultă că  $F$  este constantă pe  $\mathbb{R}$ . Deoarece  $F(0) = 0$ , deducem că  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = 0$ .

d) Se arată prin calcul direct.

e) Se arată prin calcul direct.

f) Dacă pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ , din c) rezultă  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = F'(x) = 0$ .

Atunci, pentru orice  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ , avem:

$$0 = \int_0^{2\pi} \cos px \cdot f(x) dx \stackrel{\text{d), e)}}{=} a_p \cdot S(p, p) = a_p \cdot \pi, \text{ deci } a_p = 0.$$

g)  $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{p=1}^n a_p^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 px dx + 2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} a_p \cdot a_q \cdot \int_0^{2\pi} \cos px \cdot \cos qx dx = \pi \sum_{p=1}^n a_p^2.$$

Rezultă că  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .