

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....027***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete****SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\frac{3+2i}{3-2i}$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(1,2,4)$  la punctul  $E(2,3,9)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\sin 45^\circ \notin \mathbb{Q}$ .
- (4p) d) Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsa de ecuație  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  și dreapta de ecuație  $x + y = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(-1, 2, 1)$ ,  $C(2, 1, -1)$  și  $D(1, 2, 4)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe  $(\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ)^{360} = a + bi$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se arate că  $\log_2 3 < 2$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr  $n \in \{0,1,2,3,4\}$  să verifice relația  $3^n + 4^n \geq 7^n$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 5$ , are inversa  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , să se calculeze  $g(8)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x^3 + 5x - 6 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului  $f = X^4 - X - 8$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - \arctgx$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f'(x) dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3 + 1} dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbf{C}^*$  și

mulțimile  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C}) \mid a + d = 0 \right\}$  și  $N = \left\{ X \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C}) \mid X^2 = O_2 \right\}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $A \in N$  și  $B \in N$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei  $A$ .
- (4p) c) Să se găsească o matrice  $C \in M$ , cu proprietatea  $C \notin N$ .
- (2p) d) Să se arate că, dacă  $X \in N$  atunci  $X \in M$ .
- (2p) e) Să se verifice că matricea  $U$  este inversabilă și  $U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ .
- (2p) f) Dacă  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C})$  cu  $c \cdot d \neq 0$  și  $V = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} & 1 \\ 0 & \frac{d}{c} \end{pmatrix}$ , să se calculeze  $V \cdot D \cdot V^{-1}$ .
- (2p) g) Să se arate că orice matrice  $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$  cu  $ac \neq 0$  se scrie ca sumă de două matrice din mulțimea  $N$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x - \sin x$  și integralele  $I_n = \int_0^{2006} \sin(x^n) dx$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că  $x \geq \sin x$ ,  $\forall x \geq 0$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $I_1$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin(x^n) dx = 0$ .
- (2p) e) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că
$$\int_1^{2006} \frac{\cos(x^n)}{x^n} dx = \frac{\cos 1}{n-1} - \frac{\cos(2006^n)}{(n-1) \cdot 2006^{n-1}} - \frac{n}{n-1} \int_1^{2006} \sin(x^n) dx, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2.$$
- (2p) f) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{2006} \frac{\cos(x^n)}{x^n} dx = 0$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

## Varianta 27

**Subiectul I.**

- a)  $\left| \frac{3+2i}{3-2i} \right| = 1$ .
- b)  $DE = 3\sqrt{3}$ .
- c) Evident.
- d) Punctele de intersecție sunt  $A\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$  și  $B\left(-\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$ .
- e)  $V_{ABCD} = \frac{35}{6}$ .
- f)  $a=1$  și  $b=0$ .

**Subiectul II.**

1.

- a)  $\log_2 3 < 2 \Leftrightarrow 3 < 2^2$ , adevărat.
- b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{2}{5}$ .
- c)  $g(8) = 1$ .
- d)  $x = 1$ .
- e) 0.

2.

- a)  $f'(x) = \frac{2x^2 + 1}{1 + x^2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f'(x) dx = 2 - \frac{\pi}{4}$ .
- c)  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$ .
- e)  $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{2}{3} \cdot \ln 2$ .

**Subiectul III.**

- a) Evident.
- b)  $\det(A) = 0$ ,  $\text{rang}(A) = 1$ .

c)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M \setminus N$ .

d) Considerăm  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N$ . Atunci  $X^2 = O_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ b(a+d) = 0 & (2) \\ c(a+d) = 0 & (3) \\ d^2 + bc = 0 & (4) \end{cases}$ , de unde

obținem  $a+d=0$ , sau  $X = O_2$ .

e) Se demonstrează prin calcul direct.

f)  $V \cdot D \cdot V^{-1} = \begin{pmatrix} a+d & \frac{bc^2 - acd}{d^2} \\ \frac{d^2}{c} & 0 \end{pmatrix}$ .

g) Considerăm matricea  $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M$ .

Avem  $a \cdot c \neq 0$  și pentru  $V = \begin{pmatrix} -c & 1 \\ a & -\frac{a}{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  obținem, utilizând f), că

$$V \cdot E \cdot V^{-1} = F + G, \text{ cu } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ și } G = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cum  $F^2 = G^2 = O_2$ , rezultă că  $F, G \in N$ .

Mai mult,  $E = V^{-1} \cdot F \cdot V + V^{-1} \cdot G \cdot V \in N$ , de unde rezultă concluzia.

#### **Subiectul IV.**

a)  $f'(x) = 1 - \cos x, \forall x \in \mathbf{R}$ .

b) Dacă  $x \geq \frac{\pi}{2}$ , evident  $x > 1 \geq \sin x$ .

Dacă  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , pe cercul trigonometric, considerăm punctele  $M(\cos x, \sin x)$  și  $A(1, 0)$ . Deoarece lungimea arcului mic de cerc de extremități  $A$  și  $M$  este mai mare decât distanța de la  $M$  la  $Ox$ , deducem  $x \geq y_M$ , adică  $x \geq \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

c)  $I_1 = 1 - \cos 2006$ .

d) Pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$  și  $x \in [0, 1]$ , aplicând b) obținem  $0 \leq \sin(x^n) \leq x^n$ , de unde, integrând pe intervalul  $[0, 1]$  și trecând la limită în inegalitatea obținută, deducem concluzia.

e) Se arată prin calcul direct.

f) Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $x > 0$   $\frac{-1}{x^n} \leq \frac{\cos(x^n)}{x^n} \leq \frac{1}{x^n}$ .

Integrând această inegalitate pe intervalul  $[1, 2006]$  și trecând apoi la limită, obținem concluzia.

g) Se trece la limită în egalitatea de la e).

Tinând cont de f) și de d) deducem concluzia.