

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta026***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$ se consideră punctele $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 3, 3)$.

- (4p) a) Să se determine distanța dintre punctele A și C .
- (4p) b) Să se determine distanța de la punctul A la planul (xOy) .
- (4p) c) Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.
- (4p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 + 1 = 0$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să aibă loc următoarea egalitate în mulțimea \mathbf{C} :
- $$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) = a + ib.$$
- (2p) f) Să se calculeze aria cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze $C_{10}^2 - C_{10}^8$.
- (3p) b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul $g = X - a$ să dividă polinomul $f = X^3 - 1$.
- (3p) c) Să se determine numărul funcțiilor injective $f : \{1, 2\} \rightarrow \{3, 4, 5\}$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $\log_3^2(3x) = 1$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) e) Să se determine probabilitatea ca un element din (\mathbf{Z}_8, \cdot) să fie inversabil.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(f(-2))$.
- (3p) b) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) c) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-1, \infty)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_3, A_0, A \in M_3(\mathbf{Z})$, cu $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

funcția $f_A : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_A(x) = \det(A + xI_3)$ și polinomul $g \in \mathbf{Z}[X]$.

- (4p) a) Să se calculeze $\det(A_0)$.
- (4p) b) Pentru $x \in \mathbf{R}$, să se calculeze $\det(A_0 + xI_3)$.
- (4p) c) Să se demonstreze că există $a, b, c \in \mathbf{Z}$ astfel încât $\forall x \in \mathbf{R}$,
$$f_A(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$
- (2p) d) Să se demonstreze că $\det(A) = c$.
- (2p) e) Dacă $\det(A + \sqrt{2} \cdot I_3) = 0$, să se demonstreze că funcția f_A are o rădăcină întreagă.
- (2p) f) Dacă există $t \in \mathbf{Z}$ astfel încât $g(t)$ și $g(t+1)$ sunt impare, să se demonstreze că polinomul g nu are rădăcini întregi.
- (2p) g) Dacă $\det(A)$ și $\det(A + I_3)$ sunt impare, să se demonstreze că $\forall q \in \mathbf{Q}$,
$$\det(A + qI_3) \neq 0.$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, cu $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 - 2$ și astfel încât $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = x \cdot f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)$. Se consideră cunoscute formulele $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y$, $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se calculeze $\int_{-2}^2 f_1(x) dx$ și $\int_{-2}^2 f_2(x) dx$.
- (4p) b) Să se calculeze $f_3(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_2(2\cos x) = 2\cos 2x$.
- (2p) d) Folosind eventual inducția matematică, să se demonstreze că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n(2\cos x) = 2\cos nx$.
- (2p) e) Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\int_{-2}^2 f_n(x) dx = 2 \cdot \int_0^\pi f_n(2\cos t) \cdot \sin t dt$.
- (2p) f) Să se demonstreze că sirul $(f_n(1))_{n \in \mathbf{N}^*}$ este divergent.
- (2p) g) Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-2}^2 x \cdot f_n(x) dx = 0$.

Varianta 26

Subiectul I.

- a) $AC = \sqrt{5}$.
 b) 3.
 c) $AC = BC = \sqrt{5}$, deci triunghiul ABC este isoscel.
 d) $z \in \{-i, i\}$.
 e) $a = 0$, $b = 1$.
 f) Aria cercului este $S = 4\pi$.

Subiectul II.

1.

- a) 0.
 b) $a = 1$.
 c) 6 funcții injective.
 d) $x \in \left\{ \frac{1}{9}, 1 \right\}$.
 e) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{2}$.

2.

- a) $f(f(-2)) = \frac{2}{3}$.
 b) Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptota căutată.
 c) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
 d) $f''(x) < 0$, $\forall x > -1$, așadar funcția f este concavă pe $(-1, \infty)$.
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$.

Subiectul III.

- a) $\det(A_0) = -1$.
 b) $\det(A_0 + xI_3) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
 c) Evident.
 d) Avem $c = f_A(0) = \det(A)$.
 e) $\det(A + \sqrt{2} \cdot I) = 0 \Leftrightarrow f_A(\sqrt{2}) = 0$ și din c) obținem că $f_A(x) = (x^2 - 2) \cdot (x + a)$, cu rădăcina întreagă $x = -a$.
 f) Se demonstrează prin reducere la absurd.

g) Avem $\det(A) = f_A(0)$ și $\det(A + I_3) = f_A(1)$ și din **c)** stim că $f_A \in \mathbf{Z}[X]$. Deoarece $f_A(0)$ și $f_A(1)$ sunt impare, din **f)** rezultă că f_A nu are rădăcini întregi. Este evident că în acest caz f_A , care are coeficientul dominant egal cu 1, nu are rădăcini raționale.

Subiectul IV.

a) $\int_{-2}^2 f_1(x) dx = 0$ și $\int_{-2}^2 f_2(x) dx = -\frac{8}{3}$.

b) $f_3(x) = x^3 - 3x$, pentru $x \in \mathbf{R}$.

c) Evident.

d) Se demonstrează prin inducție, folosind că pentru $k \in \mathbf{N}^*$, $f_k(2\cos x) = 2\cos kx$ și $f_{k+1}(2\cos x) = 2\cos(k+1)x$ și demonstrând că $f_{k+2}(2\cos x) = 2\cos(k+2)x$.

e) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, se efectuează în integala din dreapta schimbarea de variabilă $2\cos t = x$.

f) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(1) \stackrel{\text{e)}{\rightarrow} 2\cos \frac{n\pi}{3}$.

Mai mult, $f_{6k}(1) = 2 \rightarrow 2$ și $f_{6k+1}(1) = 1 \rightarrow 1$,

deci sirul $(f_n(1))_{n \in \mathbf{N}^*}$ este divergent, având două subșiruri cu limite diferite.

g) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, folosind punctele **e)** și **d)**

$$a_n = \int_{-2}^2 f_n(x) dx = \frac{2(1 - (-1)^{n+1})}{n+1} + \frac{2((-1)^{n-1} - 1)}{n-1}, \text{ de unde rezultă că } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Folosind relația din ipoteză, rezultă concluzia.