

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....025***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete****SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  știind că punctul  $A(1,-2)$  este situat pe cercul de ecuație  $x^2 + y^2 - a = 0$ .
- (4p) b) Să se scrie ecuația unei drepte paralele cu dreapta de ecuație  $x = 4$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}$ .
- (4p) d) Să se calculeze modulul numărului complex  $z = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin A$  dacă în triunghiul  $ABC$  avem  $BC = 2$ ,  $AB = 4$  și  $m(\hat{C}) = 30^\circ$ .
- (2p) f) Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  în care  $BC = 2$ ,  $AB = 4$  și  $m(\hat{B}) = 30^\circ$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Să se determine simetricul elementului  $\hat{3}$  în grupul  $(\mathbf{Z}_8, +)$ .
- (3p) b) Să se determine  $a \in (0, \infty)$  pentru care  $\log_3 2 + \log_3 a = 1$ .
- (3p) c) Să se determine  $b \in \mathbf{R}$  pentru care  $9^b = 27$ .
- (3p) d) Să se calculeze câte numere de 2 cifre scrise în baza 10 au numai cifre impare.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea să alegem un nastur alb dacă avem 3 nasturi albi și 5 nasturi negri.

**2. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ .**

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(1)$ .
- (3p) b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n+1) - f(n))$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$  și matricele  $A_n = \begin{pmatrix} n^2 & 1 \\ -1 & n^2 \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $A_n \in G$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .  
 (4p) b) Să se arate că  $A \cdot B \in G$ ,  $\forall A, B \in G$ .  
 (4p) c) Să se calculeze determinantul și rangul matricei  $A_{2007}$ .  
 (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \in G$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

$$\text{Notăm } \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ -y_n & x_n \end{pmatrix} = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (2p) e) Să se arate că  $x_1 = 1$  și  $y_1 = 1$ .  
 (2p) f) Să se verifice relațiile  $x_{n+1} = (n+1)^2 x_n - y_n$  și  $y_{n+1} = (n+1)^2 y_n + x_n$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .  
 (2p) g) Să se arate că  $x_n > 0$  și  $y_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră  $p \in (0, \infty)$  fixat și sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = 1 + \frac{(-1)^1}{p+1} + \frac{(-1)^2}{2p+1} + \dots + \frac{(-1)^n}{np+1}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $\frac{1}{1-a} = 1 + a + \dots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$  și  $\forall a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ .  
 (4p) b) Să se deducă relația  $\frac{1}{1+x^p} = 1 - x^p + x^{2p} - \dots + (-1)^n x^{np} + (-1)^{n+1} \frac{x^{(n+1)p}}{1+x^p}$ ,  $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}$ .  
 (4p) c) Să se arate că  $0 \leq \frac{x^{(n+1)p}}{1+x^p} \leq x^{(n+1)p}$ ,  $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^*$ .  
 (2p) d) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)p}}{1+x^p} dx = 0$ .  
 (2p) e) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx$ .  
 (2p) f) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{4}$ .  
 (2p) g) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

**Varianta 025****Subiectul I**

- a)  $a = 5$ . b)  $x = 1$ . c)  $\sqrt{2}$ . d)  $|z| = 2$ . e)  $\sin(\hat{A}) = \frac{1}{4}$ .  
f)  $A_{\Delta ABC} = 2$ .

**Subiectul II**

1. a)  $\hat{5}$ . b)  $\frac{3}{2}$ . c)  $\frac{3}{2}$ . d) 25. e)  $\frac{3}{8}$ .  
2. a) 1. b)  $y = x - 1$ . c) 0. d) 0. e)  $\frac{1}{2}$ .

**Subiectul III**

a) Calcul direct. b) Calcul direct. c)  $\det A_{2007} = 2007^4 + 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A_{2007} = 2$ .

d) Se tine cont de punctul b) si de faptul ca  $A_n \in G, \forall n \geq 1$ .

e)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

f)  $A_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ -y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ -y_n & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (n+1)^2 & 1 \\ -1 & (n+1)^2 \end{pmatrix}$  de unde rezulta concluzia.

g) Scriem  $A_k$  sub forma  $A_k = \sqrt{k^4 + 1} \begin{pmatrix} \cos t_k & \sin t_k \\ -\sin t_k & \cos t_k \end{pmatrix}$ , cu  $t_k = \arctg \frac{1}{k^2}, k \geq 1$  si avem

$$x_n = a_n \cdot \cos(t_1 + t_2 + \dots + t_n), y_n = a_n \cdot \sin(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \text{ unde } a_n = \prod_{k=1}^n \sqrt{k^4 + 1} > 0$$

$$\text{Avem } 0 < t_1 + t_2 + \dots + t_n = \sum_{k=1}^n \arctg \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^n \arctg \frac{k - (k-1)}{k(k-1)+1} = \sum_{k=1}^n (\arctg k - \arctg(k-1)) = \\ = \arctg n < \frac{\pi}{2}. \text{ Rezulta } x_n > 0, y_n > 0.$$

g) Solutia a II-a: Demonstram propozitia  $P(n)$ :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{y_n}{n} > 0$ .

Pentru  $n = 1$ , din punctul e) rezulta ca  $P(1)$  este evident adevarata.

Fie  $k \in \mathbb{N}^*$ . Presupunem ca  $x_k \geq \frac{y_k}{k} > 0$  si demonstram ca  $x_{k+1} \geq \frac{y_{k+1}}{k+1} > 0$ .

Din punctul f) si din ipoteza de inducție rezulta:  $y_{k+1} = (k+1)^2 y_k + x_k > 0 \quad (1)$

$$x_{k+1} \geq \frac{y_{k+1}}{k+1} \stackrel{f}{\Leftrightarrow} (k+1)^2 x_k - y_k \geq (k+1)y_k + \frac{1}{k+1} \cdot x_k \Leftrightarrow \frac{k^3 + 3k^2 + 3k}{k+1} x_k \geq (k+2)y_k \\ \Leftrightarrow x_k \geq \frac{k^2 + 3k + 2}{k^3 + 3k^2 + 3k} \cdot y_k \quad (2)$$

Din ipoteza de inducție, avem  $x_k \geq \frac{y_k}{k}$ .

Demonstrăm că  $\frac{y_k}{k} \geq \frac{k^2 + 3k + 2}{k^3 + 3k^2 + 3k} \cdot y_k \stackrel{y_k > 0}{\Leftrightarrow} k^3 + 3k^2 + 3k \geq k \cdot (k^2 + 3k + 2)$ , adevărat.

Așadar, avem  $x_k \geq \frac{y_k}{k} \geq \frac{k^2 + 3k + 2}{k^3 + 3k^2 + 3k} \cdot y_k$ , deci relația (2) este adevărată.

Obținem că  $x_{k+1} \geq \frac{y_{k+1}}{k+1} \stackrel{(1)}{>} 0$  și din principiul întâi de inducție rezultă concluzia.

#### **Subiectul IV**

a) Avem  $1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ , fiind suma termenilor unei progresii geometrice.

b) Înlocuim pe  $a$  cu  $-x^p$  în egalitatea de la punctul a).

c) Evident.

d) Integrăm inegalitatea de la punctul c) pe intervalul  $[0,1]$  și aplicăm criteriul cleștelui.

e) Integrăm pe intervalul  $[0,1]$  egalitatea de la punctul b) și obținem

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = a_n + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)p}}{1+x^p} dx. \text{ Aplicând acum punctul d) rezultă concluzia cerută.}$$

f) Luăm  $p = 2$  și pe baza lui e) avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ .

g)  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ . Pentru  $p=1$  se integrează inegalitatea de la punctul b) pe intervalul  $[0,1]$  și se tine seama de punctul f) rezultând

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

.