

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D****Varianta ....024**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(1, -2, 3)$  la punctul  $E(0, 1, 2)$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola  $x^2 - 4y^2 = 12$  în punctul  $P(-4, 1)$ .
- (4p) d) Să se arate că punctele  $L(4, 2)$ ,  $M(3, 3)$  și  $N(2, 4)$  sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(2, 1, 1)$  și  $D(1, 2, 3)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$  și  $C(2, 1, 1)$  să aparțină planului  $x + ay + bz + c = 0$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Să se găsească un polinom  $g \in \mathbf{Z}_4[X]$ , de gradul întâi, care să aibă exact două rădăcini în  $\mathbf{Z}_4$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$  să verifice relația  $\hat{3}\hat{x} = \hat{0}$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x - 2$ , are inversa  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , să se calculeze  $g(0)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(2x^2 + 7) = \log_2(x^4 + 8)$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului  $f = X^3 - X - 1$ .

**2.**

- (3p) a) Să se găsească o funcție  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , derivabilă, astfel încât  $f'(x) = x^2$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se găsească o funcție continuă  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , neconstantă, astfel încât  $\int_0^1 f(x)dx = 2007$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = -x^2$  este concavă pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se găsească o funcție  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  strict descrescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 (x+2) \cdot e^x dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră numerele complexe  $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ , matricele  $A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și mulțimea } G = \{I_2, A, B\}.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $x_1 + x_2 + x_1 x_2$ .
  - (4p) b) Să se arate că  $\det(A) = \det(B) = \det(I_2)$ .
  - (4p) c) Să se arate că  $A^2 = B$ .
  - (2p) d) Să se determine matricea  $M = A^2 + AB + B^2$ .
  - (2p) e) Să se calculeze determinantul matricei
- $$S_n = A^{3n-1} + A^{3n-2}B + A^{3n-3}B^2 + \dots + A^2B^{3n-3} + AB^{3n-2} + B^{3n-1}, \quad n \geq 1.$$
- (2p) f) Să se arate că mulțimea  $G$ , în raport cu înmulțirea matricelor, formează o structură de grup.
  - (2p) g) Să se dea un exemplu de mulțime cu 3 elemente din  $M_2(\mathbb{C})$  diferită de  $G$ , care este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  și integralele  $I_n(p)$ , unde  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$I_n(p) = \int_0^1 (1-x^p)^n dx.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $I_1(p) = \int_0^1 (1-x^p) dx$ .
- (4p) b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că  $I_n(p) = \frac{np}{np+1} I_{n-1}(p)$ ,  $\forall n \geq 2$ ,  $n, p \in \mathbb{N}^*$ .
- (2p) c) Să se arate că  $I_n(n) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \dots \cdot \frac{n^2}{n^2+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- (4p) d) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x > 0$ .
- (2p) e) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că  $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ ,  $\forall x > 0$ .
- (2p) f) Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(n)$ .

## Varianta 24

**Subiectul I.**

- a)  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- b)  $DE = \sqrt{11}$ .
- c) Ecuația tangentei este  $x + y + 3 = 0$ .
- d) Deoarece  $\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{y_L - y_M}{x_L - x_M}$  rezultă că punctele  $L, M, N$  sunt coliniare.
- e)  $V_{ABCD} = \frac{1}{3}$ .
- f) Ecuația planului este:  $x + y + z - 4 = 0$ .

**Subiectul II.**

1.

- a) De exemplu,  $g \in \mathbf{Z}_4[X]$ ,  $g(x) = \hat{2}X$ .
- b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .
- c)  $g(0) = 1$ .
- d)  $x \in \{-1, 1\}$
- e)  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .

2.

- a)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3}{3}$ .
- b)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 4014x$ .
- c)  $f''(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este concavă pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = -3x$ .
- e)  $\int_0^1 (x+2) \cdot e^x dx = 2e - 1$ .

**Subiectul III.**

- a)  $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 0$ .
- b)  $\det(A) = \det(B) = 1 = \det(I_2)$ .
- c) Calcul direct.
- d)  $M = O_2$ .
- e) Pentru  $n \in \mathbf{N}^*$ , avem  $O_2 = A^{3n} - B^{3n} = (A - B) \cdot S_n$ , de unde rezultă că  $\det(S_n) = 0$ .
- f) Se face tabla operației și se verifică imediat axiomele grupului.

- g)** De exemplu, mulțimea  $\Gamma = \{I_2, x_1 \cdot I_2, x_2 \cdot I_2\} \neq G$  este un grup cu 3 elemente din  $M_2(\mathbb{C})$ .

#### Subiectul IV.

**a)**  $I_1(p) = \frac{p}{p+1}$ .

**b)** Se arată prin calcul direct.

**c)** Se folosește punctul **b**).

**d)**  $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$ .

**e)** Pentru  $x > 0$ , funcția  $f$  este o funcție Rolle pe intervalul  $[x, x+1]$  și folosind teorema lui Lagrange, obținem că există  $c \in (x, x+1)$  astfel încât  $\frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1 - x} = \frac{1}{c}$

$$x < c < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

**f)** Înlocuindu-l succesiv pe  $x$  în partea dreaptă a inegalității din **e)** cu numerele  $n, 2n, \dots, n^2$  și adunând inegalitățile obținute, rezultă:

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{n^2} = a_n \quad (1)$$

Se arată că  $0 < a_n < \frac{2}{\sqrt{n}}$ , de unde, aplicând criteriul cleștelui, rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Aplicând acum criteriul cleștelui în (1), rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 0, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

**g)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 1.$