

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....023***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele  $A(1, 2)$  și  $B(3, 2)$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10}$ .
- (4p) c) Să se calculeze modulul numărului complex  $z = 3 + 4i$ .
- (4p) d) Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre dreapta  $2x + y = 5$  și cercul  $x^2 + y^2 = 5$ .
- (2p) e) Să se arate că punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(3, 4)$  sunt coliniare.
- (2p) f) Să se calculeze  $\sin B - \cos C$ , știind că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic, cu  $m(\hat{A}) = 90^\circ$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x$ . Să se calculeze  $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $C_{10}^1 + C_{10}^9$ .
- (3p) c) Să se determine probabilitatea ca un element din  $\mathbf{Z}_5$  să fie inversabil, față de înmulțire.
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f = X^3$  la polinomul  $g = X - 1$ .
- (3p) e) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația  $\log_2(1 + x^2) = 1$ .

**2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^{2x}$ .**

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă.

- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t) dt$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{C})$  se consideră mulțimea  $M = \{ X \in M_2(\mathbf{C}) \mid \exists k \in \mathbf{N}, k \geq 2, X^k = O_2 \}$

și matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $A \in M$ .
- (4p) b) Să se arate că  $B^2 - (a+d)B + (ad-bc)I_2 = O_2$ ,  $\forall B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$ ,  $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$ .
- (2p) d) Să se arate că dacă  $X \in M$ , atunci  $X^2 = O_2$ .
- (2p) e) Să se arate că pentru  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , ecuația  $Z^n = A$  nu are soluție în  $M_2(\mathbf{C})$ .
- (2p) f) Să se arate că pentru  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , funcția  $f : M_2(\mathbf{C}) \rightarrow M_2(\mathbf{C})$ ,  $f(X) = X^n$  nu este surjectivă.
- (2p) g) Să se arate că dacă  $B \in M$ , atunci  $\det(I_2 + B + B^2 + \dots + B^{n-1}) = 1$ , pentru  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră numerele  $n, a, b \in \mathbf{N}^*$ , funcția  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n$

și integralele  $I_n = \int_0^\pi f_n(x) \cdot \sin x \, dx$  și  $J_n = \int_0^{\frac{a}{b}} f_n(x) \cdot \sin x \, dx$ .

- (4p) a) Să se rezolve ecuația  $f_n(x) = 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $J_1$ .
- (4p) c) Să se arate că există  $M > 0$  astfel încât  $|f_1(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in [0, \pi]$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s^n}{n!} = 0$ , unde  $s \in (0, \infty)$ .
- (2p) e) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .
- (2p) f) Folosind metoda integrării prin părți, să se arate că
- $$J_n = (-f_n(x) \cdot \cos x + f'_n(x) \cdot \sin x + f_n^{(2)}(x) \cdot \cos x - f_n^{(3)}(x) \cdot \sin x - \dots + (-1)^{n+1} f_n^{(2n)}(x) \cdot \cos x) \Big|_0^{\frac{a}{b}}$$
- (2p) g) Folosind faptul că  $f_n^{(k)}(0) \in \mathbf{Z}$ ,  $f_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbf{Z}$ ,  $\forall n, a, b \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ , să se arate că numărul  $\pi$  este irațional.

## Varianta 23

### Subiectul I.

- a)  $AB = 2$
- b) 1.
- c)  $|z| = 5$ .
- d) Există un singur punct de intersecție între dreaptă și cerc.
- e) Verificare directă.
- f)  $\sin B - \cos C = 0$ .

### Subiectul II.

1.

- a)  $f(1) + f(2) + \dots + f(10) = 165$ .
- b)  $C_{10}^1 + C_{10}^9 = 20$ .
- c) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{4}{5}$ .
- d) Restul împărțirii lui  $f$  la  $g$  este  $r = 1$ .
- e)  $x \in \{-1, 1\}$ .

2.

- a)  $f'(x) = 2e^{2x}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{2}$ .
- c)  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2e^2$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t) dt = 1$ .

### Subiectul III.

- a) Pentru  $k = 2$  avem  $A^2 = O_2$ , deci  $A \in M$ .
  - b) Se demonstrează prin calcul direct.
  - c) Se demonstrează prin calcul direct.
  - d) Considerăm  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M \Rightarrow \exists k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 2$ , astfel ca  $X^k = O_2 \Rightarrow \det(X) = 0$ .
- Din b) obținem, prin inducție, că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $X^n = t^{n-1} \cdot X$ .

Pentru  $n = k$  avem  $X^k = t^{k-1} \cdot X = O_2$ , deci  $X = O_2$  sau  $t = 0$ .

Dacă  $t = 0$ , din (1) deducem că  $X^2 = O_2$ , iar dacă  $X = O_2$ , evident că și  $X^2 = O_2$ .

e) Se arată că nu există  $Z \in M_2(\mathbf{C})$  astfel încât  $Z^n = A$ .

f) Din punctul e) deducem că  $A \notin \text{Im } f$ , deci  $f$  nu este surjectivă.

g) Considerăm  $B \in M$ .

Din punctele anterioare deducem că  $\text{tr}(B) = \det(B) = 0$  și există  $a, b, c \in \mathbf{C}$  astfel ca

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}. \text{ Obținem } \det(I_2 + B + B^2 + \dots + B^{n-1}) = \det(I_2 + B) = 1 - a^2 - bc = 1.$$

#### Subiectul IV.

a) Rădăcinile funcției  $f_n$  sunt:  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ,  $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2n} = \frac{a}{b}$ .

$$\mathbf{b)} \quad J_1 = \int_0^{\frac{a}{b}} f_1(x) \cdot \sin x \, dx = 2b - a \cdot \sin \frac{a}{b} - 2b \cdot \cos \frac{a}{b}.$$

c) Funcția  $f_1$  este continuă, deci își atinge marginile pe  $[0, \pi]$ ,  
așadar există  $M > 0$  astfel încât pentru orice  $x \in [0, \pi]$ , avem  $|f_1(x)| \leq M$ .

d) Se folosește criteriul raportului.

$$\mathbf{e)} \quad \text{Pentru } x \in [0, \pi], |f_n(x) \cdot \sin x| \leq \left| \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n \right| = \frac{1}{n!} |(f_1(x))^n| \stackrel{\mathbf{b)}}{\leq} \frac{M^n}{n!}.$$

Mai mult,  $\left| \int_0^\pi f_n(x) \cdot \sin x \, dx \right| \leq \int_0^\pi |f_n(x) \cdot \sin x| \, dx \leq \pi \cdot \frac{M^n}{n!} \rightarrow 0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

f) Se arată prin calcul direct.

g) Presupunem că există  $a, b \in \mathbf{Z}^*$  astfel încât  $\pi = \frac{a}{b}$ .

Din f) rezultă că  $J_n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

Dar pentru  $\pi = \frac{a}{b}$ , avem că  $J_n = I_n$ , iar la punctul e) am demonstrat că

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ , contradicție. Așadar  $\pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .