

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ****PROBA D***Varianta ...022*

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine modulul numărului complex $i^3 + 2$.
- (4p) b) Să se arate că punctele $D(2, 1)$, $E(3, 2)$ și $F(4, 3)$ sunt coliniare.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2}$.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(2, 0)$.
- (2p) e) Să se determine $c \in \mathbf{R}$ știind că punctul $P(c, 1)$ este situat pe dreapta de ecuație $2x - y - 3 = 0$.
- (2p) f) Să se dea un exemplu de punct $M(a, b)$ situat pe parabola de ecuație $y^2 = 4x$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Știind că $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 6$, să se arate că $b - a \in \mathbf{N}$.
- (3p) b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$.
- (3p) c) Să se dea un exemplu de matrice diferite $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det(A) = \det(B)$.
- (3p) d) Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ nu este injectivă.
- (3p) e) Să se afle numărul submulțimilor mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ care conțin elementul 0.

2.

- (3p) a) Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$ este crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$.
- (3p) c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, în punctul de abscisă $x = 1$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$.
- (3p) e) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinom cu coeficienți întregi.

- (4p) a) Să se arate că $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) b) Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$, numărul $f(a) - f(b)$ este divizibil cu $(a-b)$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $f(0) = 1$, atunci $f(3) \neq 5$.
- (2p) d) Dacă $f(2006) = 2007$ și $f(2007) = 1003$, să se arate că polinomul f nu are rădăcini întregi.
- (2p) e) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$, atunci există $h \in \mathbf{Z}[X]$, astfel încât $h(a) = b$ și $h(b) = a$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a < b < c$, atunci **nu** există $g \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $g(a) = b$, $g(b) = c$ și $g(c) = a$.
- (2p) g) Să se determine valorile lui $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ pentru care există numerele întregi a_1, a_2, \dots, a_n distincte și polinomul $u \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $u(a_1) = a_2$, $u(a_2) = a_3, \dots$, $u(a_{n-1}) = a_n$ și $u(a_n) = a_1$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b > 1$.

- (4p) a) Să se calculeze $B(2, 2)$.
- (4p) b) Să se arate că $B(a, 2) = \frac{1}{a \cdot (a+1)}$, $\forall a > 1$.
- (4p) c) Să se arate că $B(a, b) = B(b, a)$, $\forall a, b > 1$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (B(2, 2) + B(2, 3) + \dots + B(2, n))$.
- (2p) e) Să se demonstreze relația $B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)$, $\forall a > 1$, $\forall b > 2$.
- (2p) f) Să se arate că $B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, $\forall m, n \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, n)$.

Varianta 022

Subiectul I

a) $|z| = \sqrt{5}$. b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. d) $S = \frac{1}{2} |\Delta| = 2, \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. e) $c=2$. f) $M(1,2)$.

Subiectul II

1) a) $b-a=1 \in \mathbf{N}$. b) 0. c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. d) $f(-1) = f(1) \Rightarrow f$ nu este injectivă.

e) $2^4 = 16$.

2) a) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^2 = e^2 = \sqrt{e}$. c) $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \Leftrightarrow y - 2x + 1 = 0$.

d) $\int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{32}$.

e) $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$, $A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ punct de minim local și $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ punct de maxim local.

Subiectul III

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $f(x) = c_n \cdot X^n + c_{n-1} \cdot X^{n-1} + \dots + c_1 \cdot X + c_0$

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= c_n (a^n - b^n) + c_{n-1} (a^{n-1} - b^{n-1}) + \dots + c_1 (a - b) = \\ &= c_n (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) + c_{n-1} (a-b)(a^{n-2} + a^{n-3}b + \dots + ab^{n-3} + b^{n-2}) + \dots + \\ &+ c_2 (a-b)(a+b) + c_1 (a-b) \Rightarrow (a-b) | (f(a) - f(b)). \end{aligned}$$

c) Presupunem ca $f(3) = 5$. Conform punctului c) rezulta ca $(3-0) | (f(3) - f(0)) \Rightarrow 3 | 4$, fals.

d) Presupunem că f are rădăcina $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(k) = 0$. Pentru k par \Rightarrow

$$(f(k) - f(2006)) : (k - 2006) : 2 \Rightarrow -2007 : 2 \text{ fals}$$

$$\text{Pentru } k \text{ impar } \Rightarrow (f(k) - f(2007)) : (k - 2007) : 2 \Rightarrow -1003 : 2 \text{ fals.}$$

e) $h(X) = a + b - X$.

f) $g(a) - g(b) = k_1(a-b) = b - c$; $g(b) - g(c) = k_2(b-c) = c - a$;

$g(c) - g(a) = k_3(c-a) = a - b$. $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$. Prin înmulțire $\Rightarrow k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$. Dacă

$k_1 = -1 \Rightarrow a - b = c - b \Rightarrow a = c$ contradicție cu a, b, c distincte. Dacă $k_2 = 1 \Rightarrow b - c = c - a \Rightarrow$

$c = \frac{a+b}{2}$ și analog. $b = \frac{a+c}{2}$ de unde rezulta $b=c$, contradicție.

g) $n=2$ avem un polinom conform punctului e), iar pentru $n=3$ nu avem polinoame conform demonstrației de la f). La fel se demonstrează și pentru $n>3$ ca nu exista polinoame singura valoare este $n=2$.

Subiectul IV

$$a) B(2,2) = \int_0^1 x \cdot (1-x) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$b) B(a,2) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x) dx = \frac{x^a}{a} \Big|_0^1 - \frac{x^{a+1}}{a+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}.$$

$$c) B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = - \int_1^0 (1-t)^{a-1} \cdot t^{b-1} dt = \int_0^1 (1-x)^{a-1} \cdot x^{b-1} dx = B(b,a).$$

$$d) B(2,2) + B(2,3) + \dots + B(2,n) = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

e) Se integrează prin părți.

$$f) B(m,n) = \frac{n-1}{m+n-1} B(m,n-1) = \frac{n-1}{m+n-1} \cdot \frac{n-2}{m+n-2} \cdot B(m,n-2) = \dots = \\ = \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(m+n-1) \cdot (m+n-2) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot B(m,1) = \frac{(n-1)!}{(m+n-1) \cdot (m+n-2) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot B(1,m) = \\ = \dots = \frac{(n-1)!}{(m+n-1) \cdot (m+n-2) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \frac{m-1}{1+m-1} \cdot \frac{m-2}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(n-1)! \cdot (m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

g) Fie $x_n = B(n,n)$. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4}$ de unde rezulta ca $\lim_{n \rightarrow \infty} B(n,n) = 0$.