

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta021***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se scrie trei numere complexe cu modulul egal cu 1.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(2,-1)$ la dreapta $x + y + 5 = 0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația cercului cu centru în punctul $Q(1,1)$ care trece prin punctul $P(4,5)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(0,1,2)$, $M(0,2,3)$ și $N(0,3,4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 0, 2)$, $B(0, 2, 1)$, $C(2, 1, 0)$ și $D(-1, -2, -3)$.
- (2p) f) Să se determine un număr complex z care verifică egalitatea $z^2 + z + 1 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- (3p) c) Să se determine probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_{10}$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.
- (3p) d) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + x + 3$, are inversă $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(5)$.
- (3p) e) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $2^x + 8^x = 10$.

2.

- (3p) a) Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, derivabilă, astfel încât $f'(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se găsească o funcție continuă $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, neconstantă, astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = 1$.
- (3p) c) Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$ este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se găsească o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 xe^x dx$.

SUBIECTUL III (20p)

- Se consideră mulțimea $G = (0, \infty) \times \mathbf{R}$ pe care se definește legea de compoziție " \circ " prin $(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) = (a_1 a_2, a_1 x_2 + x_1)$, pentru orice $(a_1, x_1), (a_2, x_2) \in G$.
- (4p) a)** Să se arate că $((a_1, x_1) \circ (a_2, x_2)) \circ (a_3, x_3) = (a_1, x_1) \circ ((a_2, x_2) \circ (a_3, x_3))$,
 $\forall (a_1, x_1), (a_2, x_2), (a_3, x_3) \in G$.
- (4p) b)** Să se verifice că $(a, x) \circ (1, 0) = (1, 0) \circ (a, x) = (a, x)$, $\forall (a, x) \in G$.
- (4p) c)** Să se verifice că $(a, x) \circ \left(\frac{1}{a}, -\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{x}{a}\right) \circ (a, x) = (1, 0)$, $\forall (a, x) \in G$.
- (2p) d)** Să se găsească două elemente (a_1, x_1) și (a_2, x_2) din mulțimea G pentru care $(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) \neq (a_2, x_2) \circ (a_1, x_1)$.
- (2p) e)** Să se arate că legea " \circ " determină pe mulțimea G o structură de grup necomutativ.
- (2p) f)** Să se arate că $\underbrace{(a, x) \circ (a, x) \circ \dots \circ (a, x)}_{de\ n\ ori} = (a^n, x(1 + a + \dots + a^{n-1}))$, $\forall (a, x) \in G$ și $n \in \mathbf{N}^*$
- (2p) g)** Să se demonstreze că pentru orice $(a, x) \in G$ și oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, există $(u, v) \in G$ astfel încât $\underbrace{(u, v) \circ (u, v) \circ \dots \circ (u, v)}_{de\ n\ ori} = (a, x)$.

SUBIECTUL IV (20p)

- Se consideră sirul $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) a)** Să se calculeze I_1 .
- (4p) b)** Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.
- (4p) c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $I_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d)** Să se arate că $\sqrt{\frac{x-2}{x}} < \frac{x}{x+1} < \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$, $\forall x > 2$.
- (2p) e)** Să se arate că $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{3}{2n+3}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.
- (2p) g)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{I_n}$.

Varianta 21

Subiectul I.

- a) De exemplu numerele $1, -1, i$ au modulul egal cu 1.
 b) Distanță căutată este $3\sqrt{2}$.
 c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 - 25 = 0$.
 d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$.
 e) $V_{ABCD} = \frac{9}{2}$.
 f) $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II.
1.

- a) $\det(A) = 0$.
 b) $\text{rang}(A) = 2$.
 c) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{5}$.
 d) $g(5) = 1$.
 e) $x = 1$.

2.

- a) Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$ are $f'(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
 b) Pentru funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, avem: $f(x) = 2x$, $\int_0^1 f(x) dx = 1$.
 c) $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
 d) Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$ este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
 e) $\int_0^1 xe^x dx = 1$.

Subiectul III.

- a) Se arată prin calcul direct.
 b) Se arată prin calcul direct.
 c) Se arată prin calcul direct.
 d) De exemplu, $(1, 2) \circ (2, 3) = (2, 5)$, iar $(2, 3) \circ (1, 2) = (2, 7)$, deci $(1, 2) \circ (2, 3) \neq (2, 3) \circ (1, 2)$
 e) se arată ușor că „ \circ ” este lege de compozitie pe mulțimea G și se folosesc punctele a), d), b) și c).

f) Se demonstrează prin inducție.

g) Folosind punctul f), demonstrăm de fapt că $\forall a > 0, \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$, există

$$u > 0, v \in \mathbf{R}, \text{ astfel încât } \begin{cases} u^n = a \\ v(1+u+\dots+u^{n-1}) = x \end{cases}.$$

Soluția sistemului anterior este

$$\begin{cases} u = \sqrt[n]{a} > 0 \\ v = \frac{x}{1+\sqrt[n]{a}+\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}}} \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

Subiectul IV.

a) $I_1 = \frac{2}{3}$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se folosește principul întâi al inducției matematice și relația de recurență de la punctul b).

d) Se ridică la patrat și se fac calculele.

e) Dând pe rând lui x valorile $4, 6, \dots, 2n$ în inegalitatea din d), înmulțind inegalitățile obținute deducem: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}} \leq \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{5}{2n+3}}$

Înmulțind inegalitatea precedentă cu inegalitatea evidentă: $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} < \sqrt{\frac{3}{5}}$ obținem concluzia.

f) Din e) avem, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < I_n < \sqrt{\frac{3}{2n+3}}, \forall n \in \mathbf{N}^*$ și trecând la limită în inegalitatea precedentă și folosind criteriul cleștelui, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

g) Avem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{I_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln I_n}{n}}$.

Logaritmând în dubla inegalitate din e), obținem:

$$\ln \frac{2}{3\sqrt{n}} < \ln I_n < \ln \sqrt{\frac{3}{2n+3}} \Rightarrow \frac{\ln \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \ln n}{n} < \frac{\ln I_n}{n} < \frac{\ln \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2n+3)}{n}$$

Trecând la limită în inegalitatea precedentă și folosind criteriul cleștelui, rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln I_n}{n} = 0 \text{ și obținem în final } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{I_n} = e^0 = 1.$$